SERIE INFINITE in EURISTICA

solidità, coerenza ed eleganza delle serie infinite in euristica matematica

Andrea Sorato

0) Indice

Per quasi ogni metodo e tecnica vedremo i tipi di serie:

- alternate stabili

- divergenti a termini costanti

- divergenti a termini non costanti, non a pattern

Le serie a pattern saranno invece trattate a parte, data la loro somiglianza con le tre tipologie appena citate.

1) Premesse

1a) Premesse generali

Segnala errori a:

andrea.thesimplepub@gmail.com

e invito, prima di continuare la lettura, a consultare la pagina:

thesimplepub.com/errorilibro

oppure **thesimplepub.wordpress.com/errorilibro**

per un catalogo degli errori post pubblicazione ed eventuali mancanze.

Link social a fine libro.

- Andrea Sorato

L'argomento è: **serie infinite in euristica e la loro solidità, coerenza ed eleganza.**

Il libro dunque non affronterà matematicamente l'argomento: l'euristica matematica affronta le questioni **trascurando volontariamente alcune regole matematiche**, usando intuizioni e metodi non rigorosi, per poter giungere a risultati ritenuti validi e da approfondire poi ulteriormente matematicamente.

I risultati esposti potrebbero non essere corretti, in quanto questo libro è una spiegazione di procedimenti e valutazioni mie personali, generalmente non verificate da esperti, riguardo le serie infinite, affrontate in modo euristico, sulla base di studi fatti da altri studiosi, che ho studiato per lo più da autodidatta.

I metodi e i risultati esposti possono essere ricondotti a metodi e valutazioni matematiche rigorose (che non tratteremo in questo testo) e che sono già state usate per studiare l'argomento.

Recentemente, ho avuto la possibilità di dare un'occhiata a documenti che trattavano matematicamente l'argomento. Mi sono accorto che alcune considerazioni che avevo fatto con metodi euristici portavano a risultati concordi, almeno in parte, con quelli riportati nei documenti. Dunque ho fatto, almeno in parte, un buon lavoro.

In questo libro ci focalizzeremo sui metodi euristici, sui risultati che portano e sulle domande che scaturiscono come conseguenza di essi.

Inoltre attueremo un approccio un po' via modello: un po' come in fisica o scienze: si crea un modello e finché funziona si continua ad usare, in caso contrario si aggiusta.

A volte ci saranno addirittura delle autoreferenze indirette.

Spesso i metodi euristici sono stati declassati a contradditori: spesso infatti alcune apparenti incoerenze e contraddizioni dei metodi euristici sono state usate come segnalazioni della non validità di queste procedure.

Nonostante questo,

i metodi euristici per le serie infinite e i risultati scaturiti appaiono solidi, coerenti ed eleganti.

tuttavia, questi metodi mi risultano, a volte e per ora, poco efficienti.

Il libro parte da considerazioni matematiche ed euristiche già fatte da altri studiosi.

In questo libro i disegni non sono rigorosi, in quanto sono stati fatti attraverso un semplice software da disegno, e nessun software matematico.

Le parti sottolineate indicano un aspetto interessante da approfondire, da me non risolto o da me non conosciuto o che per brevità non è trattato in questo libro. Inoltre al capitolo 12 vi sarà una sommaria descrizione di alcuni problemi aperti o interessanti.

Il libro potrebbe non essere scritto in un font compatibile con le espressioni matematiche, che potrebbero essere non allineate tra di loro come dovrebbero.

1b) Introduzione alle serie

Una serie è, in poche parole, una somma di numeri.

es.: 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12

Spesso per brevità si mettono i puntini per evitare di scrivere tutti i numeri:

es.: 1+2+3+4+...+12

Al posto dei numeri si possono usare delle variabili, per esempio:

a+b+c+d+e+f+g

oppure una sola variabile con l'indice (pedice) che varia:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$

In una serie con una quantità finita di termini indicheremo spesso con N, n o a volte con #, il numero di termini sommati:

es.: 1+2+3+4

N=4 oppure n=4 (oppure #=4)

Somme parziali

La somma parziale è la somma dei termini della serie fino a un termine n-esimo indicato.

Esempio, data la serie:

S: 1+2+3+4

le sue somme parziali sono:

$s_0 = 0$

$s_1 = 1$

$s_2 = 1+2 = 3$

$s_3 = 1+2+3 = 6$

$s_4 = 1+2+3+4 = 10 = s$

L'ultima somma parziale coincide con la somma totale s.

(Generalmente non si considera s_0 come la somma nulla, ma come la somma del solo primo termine. In questo libro però faremo uso della convenzione s_0: somma nulla, data la sua incredibile utilità).

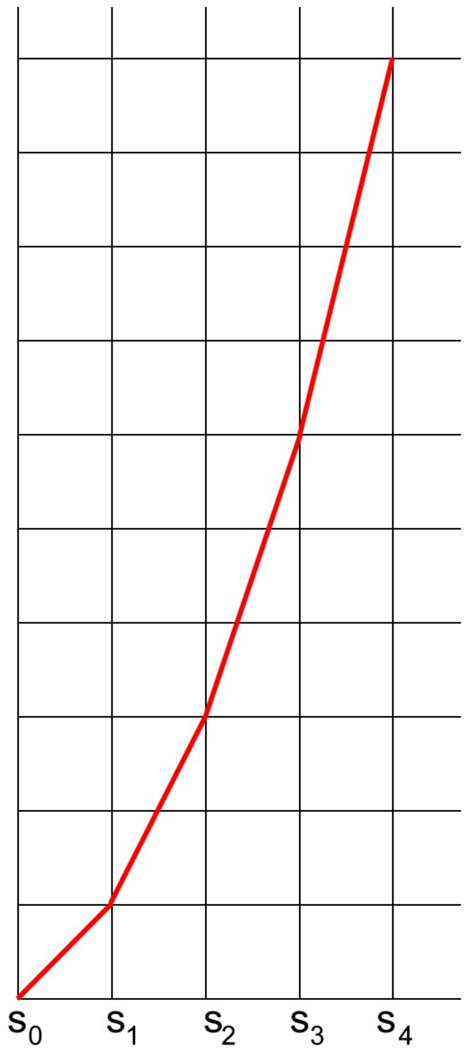


Grafico a linee delle somme parziali della serie 1+2+3+4 (la linea spezzata parte dall’origine, cioè dall’altezza 0: somma parziale iniziale = 0).

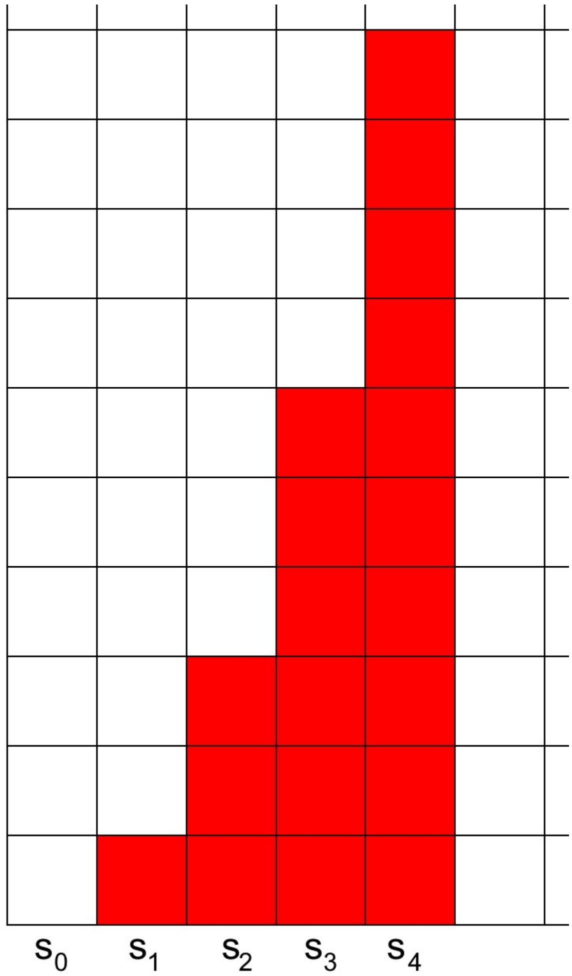


Grafico istogramma delle somme parziali della serie
1+2+3+4

Nel grafico istogramma delle somme parziali deve essere sempre presente il primo gradino nullo, ossia la prima colonna deve essere vuota (somma parziale iniziale = 0).

Più avanti vedremo come il grafico a istogramma sia da preferire a quello a linee.

Serie infinite

Una serie infinita è una serie con un’infinita quantità di termini.

Per esempio la serie che somma tutti i numeri naturali in ordine, senza lo 0, è una serie infinita:

es.: 1+2+3+4+...

1+3+7+9+...

1-1+1-1+...

1+2+2+2+...

1c) Tipi di serie infinite e caratteristiche

Serie convergente

Una serie infinita può avere un risultato, ossia può convergere.

es.: 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... = 1

Si dimostra che la somma dei termini di questa serie, all’infinito dà 1 (più avanti si vedrà la dimostrazione).

Serie alternata

Una serie alternata è una serie a segno alterno, ossia con un termine positivo e uno negativo alternatamente (o viceversa).

esempi:

1-1+1-1+...

-1+1-1+1-...

1-2+3-4+...

1-4+7-12+3-2+...

1-2+1-2+1-2+...

(Per estensione indicheremo come alternate anche le serie ottenute da 0 e poi da una serie alternata:

es.: 0+0+1-1+1-1+...)

Una serie alternata può essere convergente.

Serie alternata indeterminata

Alcune serie in matematica non hanno un risultato finito:

es.: 1-1+1-1+1-1+... è indeterminata

Il risultato è indeterminato in quanto le somme parziali oscillano tra 1 e 0 (non si riesce a determinare quale sia il risultato finale).

Non tutte le serie alternate sono indeterminate, per esempio la serie 1-1/2+1/3-1/4+1/5-... si dimostra convergere a ln2.

Serie divergente

Una serie divergente è una serie la cui successione delle somme parziali diverge. In parole semplici “il suo valore è infinito”.

es.: 1+1+1+1+...

1+4+2+3-8+...

1+2+3+4+... diverge

(1+2+3+4+... = +∞, questa scrittura non è però rigorosa: bisognerebbe usare il limite delle somme parziali).

Serie divergente a termini costanti

Serie divergente con termini tutti uguali

es.: +1+1+1+1+...

+2+2+2+2+...

-2-2-2-2-...

+x+x+x+x+...

Serie divergente a termini non costanti, non a pattern

Serie divergente con i termini non uguali tra di loro e che non seguono alcun pattern.

es.: 1+2+3+4+5+...

1+0+5+60+2+...

Spesso i metodi per le serie divergenti a termini non costanti si applicano anche per quelle divergenti a termini costanti, in quanto quest’ultime possono essere considerate come caso delle prime (un po’ come un quadrato che è un rettangolo con tutti i lati congruenti)

Serie divergente a pattern

Una serie divergente a pattern è una serie divergente i cui termini si ripetono a pattern, ossia periodicamente.

Es.: 1+2+1+2+1+2+... (pattern: 1, 2)

4+2+1+4+2+1+... (pattern: 4, 2, 1)

1-2+1-2+1-2+... (pattern: 1, -2)

Anche una serie divergente a termini costanti è una serie a pattern: il suo pattern è composto da solo un termine:

es.: 2+2+2+2+... (pattern: 2)

Le proprietà delle serie a pattern valgono dunque anche per quelle a termini costanti, ma ovviamente non viceversa.

Le serie a termini non costanti non sono a pattern.

Serie stabile

Quando una retta che attraversa un grafico a linee o taglia i gradini del grafico istogramma di una serie è parallela all’asse x, allora la serie rappresentata dal grafico è stabile. Il metodo per trovare la retta che taglia il grafico è descritto al capitolo 11.

Indicheremo con “retta di stabilità” questa retta, ma a volte estenderemo questa indicazione anche per le rette non parallele all’asse x.

Stabile è dunque in questo libro usato in un significato simile (più largo) a quello già presente in matematica.

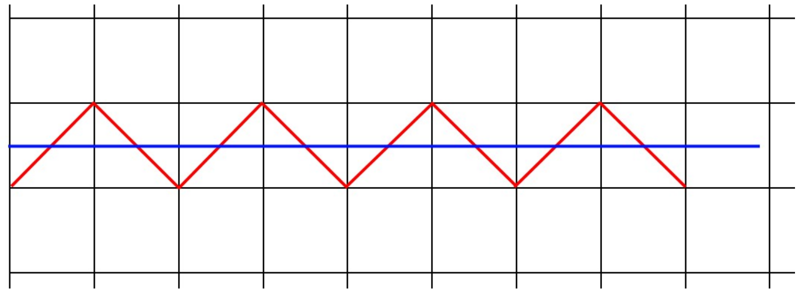
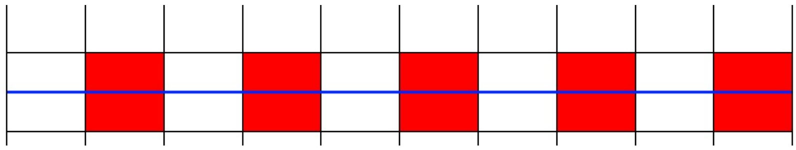


grafico a linee di 1-1+1-1+...

La retta che attraversa il grafico (in blu) è parallela all’asse x.

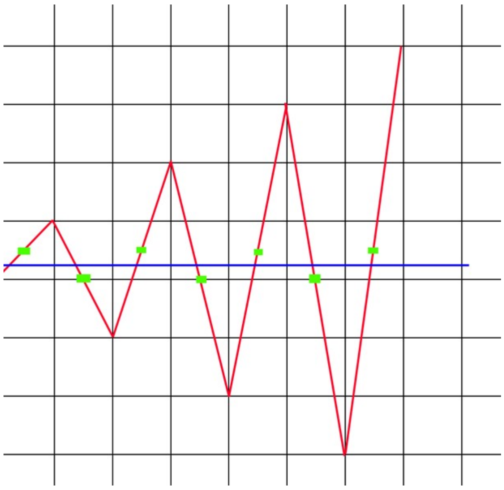
La serie 1-1+1-1+... è stabile.

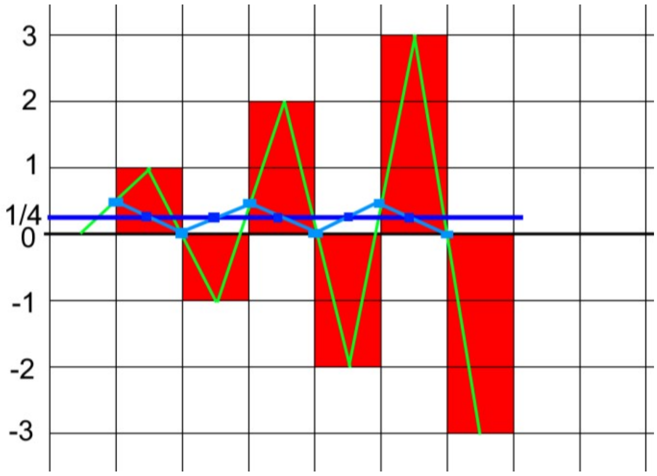
La retta di stabilità appare anche nel relativo grafico a istogramma:



Il metodo per la tracciatura della retta blu è descritto al capitolo 11.

Grafici a linee e ad istogramma della serie 1-2+3-4+...





Le rette di stabilità in blu sono parallele all’asse x.

Un sistema rigoroso per verificare la stabilità verrà esposto nel capitolo 11.

Una serie stabile può essere raccolta tranquillamente:

1-2+3-4+... → 1-(2-3+4-5+...)

Più info nel problema dell'aggiunta e nel capitolo 11 (modello).

Serie geometriche

Una serie geometrica è una serie dove il rapporto tra due termini successivi è costante:

$x_1+x_2+x_3+x_4+...$ con rapporto $=x_{j+1}/x_j=k$ costante

Esempi di serie geometriche:

2+4+8+16+... k=2

1/2+1/4+1/8+1/16+... k=1/2

3+9+27+81+... k=3

Termini eccezione

A volte in una serie di un tipo può esserci 1 o più termini che non seguono la caratteristica:

es.: 1+1+0+1+1+1+...

Questa non è una serie divergente a termini costanti, è a termini non costanti.

es.: 0+0+1-1+1-1+...

Questa rimane una serie alternata stabile, ma è meglio sempre precisare la presenza di 2 zeri eccezionali iniziali.

Come indicare una serie e il suo risultato

Indicheremo spesso con una lettera una serie, esempio:

a: 1/2+1/4+1/8+1/16+...

a in questo caso indica la serie 1/2+1/4+1/8+1/16+...

e con una lettera il suo risultato

es.: 1/2+1/4+1/8+1/16+...=s

s=1

s indica il risultato della serie (o in generale il valore associato).

A volte pe semplicità useremo la stessa lettera sia per indicare la serie, sia per il suo risultato (oppure useremo una lettera minuscola e una maiuscola, o viceversa)

es.: A: 1/2+1/4+1/8+...=a

oppure

a: 1/2+1/4+1/8+1/16+...=A.

In una serie infinita non è importante il numero di termini scritti prima dei puntini, ciò importa solo per la chiarezza e la comprensione per il lettore.

Esempio:

1+2+3+4+5+... è la stessa cosa di 1+2+3+...

Ovviamente scrivere 1+... sarebbe molto ambiguo in quanto potrebbe rinviare a 1+2+3+4+... oppure a 1+1+1+1+... eccetera.

1d) Somma tra serie

Più serie infinite possono essere sommate tra loro.

Possono essere sommate orizzontalmente o verticalmente:

Orizzontalmente:

Esempio:

1+2+3+4+...+1+1+1+1+...

Vi sono vari modi per eseguire la somma e il metodo è abbastanza equivoco.

Verticalmente:

Esempio:

a: 1+2+3+4+... +

b: 1+1+1+1+... =

---

c: 2+3+4+5+...

dove c = a+b

Il metodo verticale (in colonna) è sicuro, mentre quello orizzontale rischia di far cadere in errori o equivoci ed è generalmente da evitare, o da precisare ulteriormente via metodo verticale.

Più info al capitolo 5: “problema dell’aggiunta” / “the add problem”.

Spazi vuoti

Se in una somma tra serie, una serie presenta spazi vuoti al posto dei termini iniziali, si sottintende la presenza di zeri, esempio:

```
a:    1-1+1-1+...      +
b:      2+2+2+...      =
-------------------------------------
c:    1+1+3+1+...      (c=a+b)
```

Si intende:

```
a:    1-1+1-1+...      +
b:    0+2+2+2+...      =
-------------------------------------
c:    1+1+3+1+...      (c=a+b)
```

Lasciare spazi vuoti al posto degli 0 è una scelta da evitare in quanto poco chiara e può causare sviste (soprattutto alla luce del problema dell'aggiunta, vedi capitolo 5. Circa: gli 0 infatti nelle serie infinite non sono generalmente un elemento neutro)

1e) Valori associati euristicamente

Attraverso metodi euristici si possono ottenere spesso risultati finiti anche per le serie indeterminate e divergenti.

Ecco un esempio, di cui più avanti vedremo la spiegazione:

1+2+3+4+5+...=-1/12

Il valore infinito generato dalla somma 1+2+3+4+... è associabile al valore finito -1/12, o meglio: la serie 1+2+3+4+... può essere associata al valore -1/12.

Nel prossimo capitolo vediamo più informazioni su queste serie.

Nelle serie divergenti euristicamente trattate come 1+2+3+4+...=-1/12 l'= non è matematicamente corretto.

In questo caso l'=, da un certo punto di vista, prende il significato di associazione, e non di equivalenza.

Alla fine vi sarà un capitolo dedicato ad alcune idee per un modello per la descrizione di questi risultati e del senso di = (capitolo 11d).

Generalmente i metodi euristici possono essere applicati anche alle serie non convergenti e portano agli stessi risultati matematici.

1f) Parentesi

Questa questione è delicata. Useremo le parentesi per indicare l'ordine di raggruppamento e risoluzione, esempio:

(1+2+3+4+...)+2 → -1/12 + 2

(Dove -1/12 è il valore associato a 1+2+3+4+...)

1+(1+1+1+1+...) → 1 -1/2

(dove -1/2 è il valore associato alla serie 1+1+1+1+...)

Per più info vedi capitolo 11b (Proprietà associativa e raccoglimenti).

1g) Serie famose

Ecco alcune serie famose con i loro valori associati.

Per alcune di esse vedremo anche la formula delle somme parziali, importante per attuare ulteriori calcoli (vedi capitolo 10: funzioni associate)

Queste sono già state studiate molto da vari studiosi.

Affronteremo queste serie quasi sempre con metodi euristici.

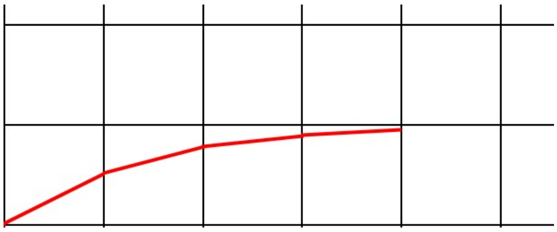
I risultati e i metodi per queste serie famose verranno considerate come veri e come punto di partenza.

1/2+1/4+1/8+1/16+...=1

Vi sono metodi non euristici e euristici per la risoluzione di questa serie.

Intuizione grafica

Il grafico delle somme parziali si avvicina sempre di più all'altezza y=1, man mano che ad ogni step si aggiunge un termine (1/2, 1/4, 1/8, ecc.).



Non euristico

Le somme parziali della serie sono:

s_0 = 0

s_1 = 1/2

s_2 = 1/2+1/4 = 3/4

s_3 = 1/2+1/4+1/8 = 7/8

s_4 = 1/2+1/4+1/8+1/16 = 15/16

...

Le somme parziali seguono la formula:

$$y = \frac{2^t - 1}{2^t} = 1 - \frac{1}{2^t}$$

Dove t è l’indice della somma parziale.

Per t che tende all’infinito, il valore della somma parziale tende a 1.

Euristico

1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 +... = s

1/2 (1+ 1/2 + 1/4 + ...) = s

1/2 (1 + s) = s

s=1

$x+x^2+x^3+x^4+... = x/(1-x)$

In matematica questa serie è presentata con la condizione: $0 \le x < 1$

L'esempio precedente ricade in questo caso, infatti per $x=1/2$, $x^2=1/4$, $x^3=1/8$, eccetera.

Dunque la formula (poi spiegata) funziona:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

Somme parziali

La formula delle somme parziali è:

$$y=\frac{a-a^{t+1}}{1-a}$$

dove nel t è l'indice della somma parziale.

Per a=1/2 e t tendente a più infinito, y è 1/2.

Euristico

$x+x^2+x^3+x^4+...$ s

$x(1+x+x^2+x^3+...)=s$

x(1+s)=s

x+xs=s

$x=s-xs$

$s=x/(1-x)$

Possiamo estendere euristicamente questa formula (e altre simili) per tutti i numeri

esempio:

$2+4+8+16+...=-2$

$2+4+8+16+...=s$

$2(1+2+4+8+...)=s$

$2(1+s)=s$

$2+2s=s$

$s=-2$

infatti: $x/(1-x)$ per $x=2$ diventa:

$2/(1-2) = -2$

$1+x+x^2+x^3+... = 1/(1-x)$

Somme parziali

La formula delle somme parziali è la formula per $x+x^2+x^3+...$ più 1:

$$y = \frac{a-a^{t+1}}{1-a} + 1 = \frac{1-a^{t+1}}{1-a}$$

dove t è l'indice della somma parziale e a è il termine della serie geometrica

Euristico

$1+x+x^2+x^3+...=s$

$1+x(1+x+x^2+x^3+...)=s$

$1+xs=s$

$1=s-xs$

$1=s(1-x)$

$s=1/(1-x)$

(Questa serie risulta essere 1 + la serie $x+x^2+x^3+...$ da cui si otterrebbe la somma dei valori associati:
$1+x/(1-x) = 1/(1-x)$)

Esempio:

$1+2+4+8+16+...=-1$

Segue il caso precedente

$1+2+4+8+16+...=s$

$1+2(1+2+4+8+...)=s$

$1+2s=s$

$s=-1$

infatti per $x=2$ $s=1/(1-2)=-1$

$x-x^2+x^3-x^4+...=x/(1+x)$

Euristico

$x-x^2+x^3-x^4+...=s$

$x(1-x+x^2-x^3+...)=s$

$x(1-s)=s$

$x-xs=s$

$x=s+xs$

$x=s(1+x)$

$s=x/(1+x)$

$2-4+8-16+...=2/3$

$2-4+8-16+...=s$

$2(1-2+4-8+...)=s$

$2(1-s)=s$

$2-2s=s$

$2=3s$

$s=2/3$

infatti $x/(1+x)$ per $x=2$ è:

$2/(1+2)=2/3$

$1-x+x^2-x^3+...=1/(1+x)$

$1-x+x^2-x^3+...=s$

$1-x(1-x+x^2-...)=s$

$1-xs=s$

$s+xs=1$

$s=1/(1+x)$

(Questa serie può essere vista come 1 meno la serie $x-x^2+x^3+...=x/(1+x)$ infatti:

$1 - x/(1+x) = 1/(1+x)$)

Esempio:

$1-2+4-8+...=1/3$

$1-2+4-8+...=s$

$1-2(1-2+4-8+...)=s$

$1-2s=s$

$s=1/3$

infatti $1/(1+x)$ per $x=2$ diventa $1/(1+2)=1/3$

$1-1+1-1+...=1/2$

Questa serie in matematica è alternata e non converge.

Si chiama Serie di Grandi ed è una delle serie più famose nel panorama euristico.

Ragionando sulle somme parziali euristicamente

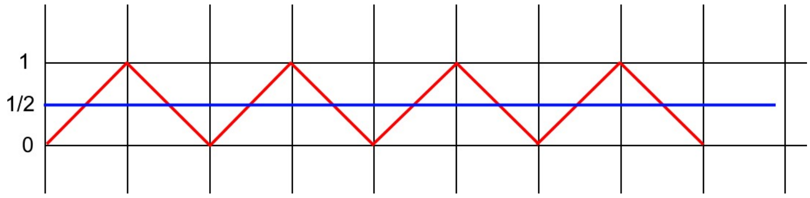
Le somme parziali di questa serie sono:

1, 0, 1, 0, ...

Il risultato finale è dunque una media delle 2:

s = (1+0)/2 = 1/2

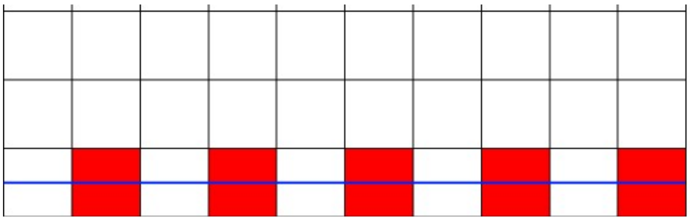
Intuizione grafica



Il grafico a linee illustra le somme parziali: il punto di inizio è l'origine, in quanto prima del primo +1 la somma parziale è 0; successivamente il +1 la rende 1, e poi il -1 la rende 0, e così via.

In realtà un grafico a linee non è molto adeguato, in quanto il passaggio da un valore ad un altro è graduale.

Per evitare ciò è corretto usare un istogramma (il grafico a linee è comunque spesso più veloce e semplice da utilizzare e da analizzare).



La retta blu che taglia il grafico (y=1/2) è parallele all'asse x, la serie è dunque stabile.

Il termine stabile in questo libro non è usato nello stesso significato di quello matematico, seppur è simile.

Poi vi sarà un tentativo di definizione.

(Per i metodi di analisi grafici, verifica stabilità ed estrazione valore da grafico, vedi capitolo 11).

Il primo quadretto è vuoto, in quanto lo stato iniziale (prima del primo +1) è 0 (l'istogramma illustra infatti le somme parziali).

Numerica

1-1+1-1+...=s

1-(1-1+1-...)=s

1-s=s

1=2s

s=1/2

Connessione con $x-x^2+x^3-x^4+...$

La serie 1-1+1-1+... ricade anche nel caso della serie $x-x^2+x^3-x^4+...=x/(1+x)$ per x=1 infatti 1/(1+1)=1/2

Intuizione fisica – esperimento mentale

Immaginiamo che ci sia una lampadina che si accende e si spegne velocemente: l'andamento è descritto dalla serie 1-1+1-1+...:

per ogni step (immaginiamo, ad ogni intervallo di tempo):

+1: la lampadina si accende (la luminosità aumenta del 100%) → somma parziale = 1: lampadina accesa

-1: la lampadina si spegne (la luminosità diminuisce del 100%) → somma parziale = 0: lampadina spenta

La lampadina si accende e spegne in questo modo all’infinito.

Supponiamo che ci sia una video-registrazione della lampadina.

Il video è infinito, ma è possibile visionarlo e gestirlo.

Una persona è interessata a scoprire quale sia lo stato “finale” della lampadina.

Decide dunque di accelerare il video per vedere quale sia il suo ultimo stato.

Man mano che lo accelera nota che la lampadina assume uno sfarfallio: gli stati acceso e spento iniziano a diventare indistinguibili.

Infine il video è accelerato del fattore infinito (velocità riproduzione x ∞).

I fotogrammi velocissimi sono indistinguibili e si mescolano tra di loro, la luminosità della lampadina risulta una via di mezzo tra accesa e spente: luminosità 1/2.

Se infatti facciamo lampeggiare una lampadina velocemente si percepisce una luminosità intermedia.

La persona giunge a 2 conclusioni:

1) La lampadina avrà uno stato finale di mezza luminosità (0.5)

2) La lampadina ha avuto, da un punto di vista atemporale, una luminosità di 0.5

Questa storiella è simile al famoso indovinello di "Thomson's lamp".

1-2+3-4+5-6+...=1/4

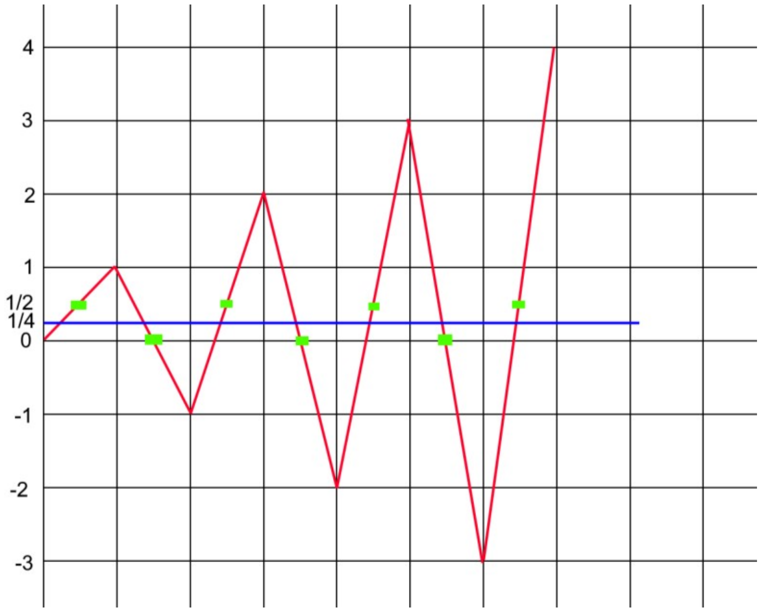
Questa serie è in matematica alternata e non convergente, ed è una delle serie più famose nel panorama euristico.

Somme parziali

Le somme parziali sono:

$s_0 = 0 \qquad s_1 = 1 \qquad s_2 = -1 \qquad s_3 = 2 \qquad s_4 = -2 \qquad \dots$

Intuizione grafica



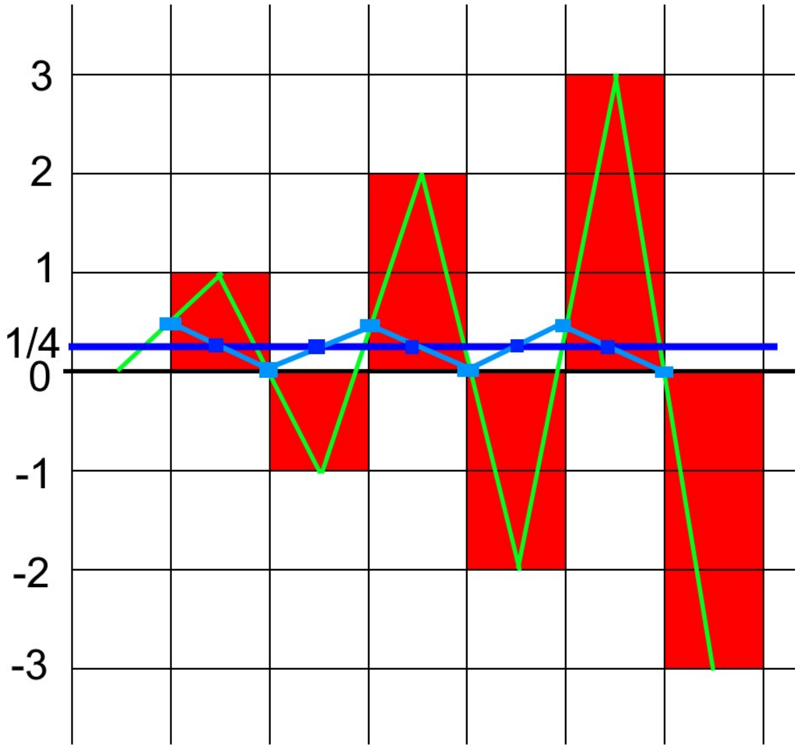
La retta blu y=1/4 “riassume” il grafico. Essa interseca l’asse y all’ordinata 1/4.

I marcatori verdi indicano i punti medi di ogni segmento rosso, la linea blu è la linea di mezzeria della zona delimitata da essi.

Si nota dunque che è stabile, ossia la retta y=1/4 è parallela all’asse x.

(Il termine stabile in questo libro non è usato nello stesso significato di quello matematico standard)

Grafico a istogramma:



Nell’istogramma:

- La linea spezzata verde ha come vertici i punti medi delle pareti orizzontali delle colonne del grafico
- I marcatori azzurri segnano i punti medi dei segmenti della linea spezzata verde
- La linea spezzata azzurra congiunge i marcatori azzurri
- I marcatori blu segnano i punti medi dei segmenti della linea spezzata azzurra

La linea blu è una retta parallela all’asse x, dunque la serie relativa al grafico è stabile (nel senso di questo libro).

Nel capitolo 11 vi sarà una spiegazione parziale del metodo per estrarre il valore dai grafici (come nel caso appena visto).

Continuiamo la spiegazione per la serie 1-2+3-4+...=1/4

Prima spiegazione numerica

1-2+3-4+5-6+... = s   +

0+1-2+3-4+5-... = s   (per stabilità) =

1-1+1-1+... = 2s

Ma 1-1+1-1+...=1/2 (vedi pagine precendenti)

Quindi 1/2=2s dunque:

1-2+3-4+...=1/4

Seconda spiegazione numerica

1-2+3-4+...=s

1-(2-3+4-5+...)=s

1-(1-2+3-4+...   +

  +1-1+1-1+...)=s

1-(s+1/2)=s

1-s-1/2=s

1/2=2s

s=1/4

1+1+1+1+...=-1/2

Questa serie in matematica è divergente, ed è una delle serie più famose nel panorama euristico.

Somme parziali

Le somme parziali sono:

$s_0 = 0 \quad s_1 = 1 \quad s_2 = 2 \quad s_3 = 3 \quad s_4 = 4 \quad \ldots$

E seguono la formula:

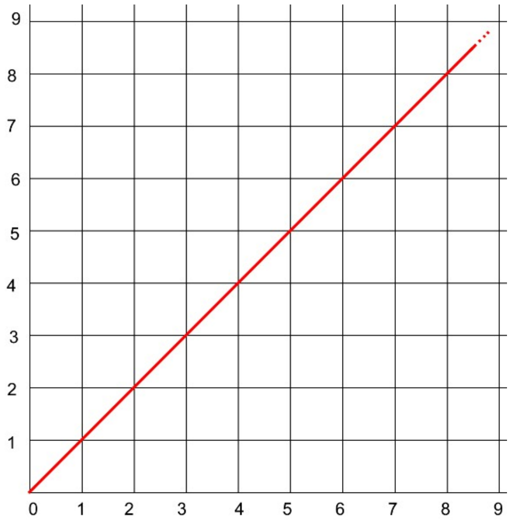
$$y = x$$

dove x è l'indice della somma parziale

Intuizione grafica

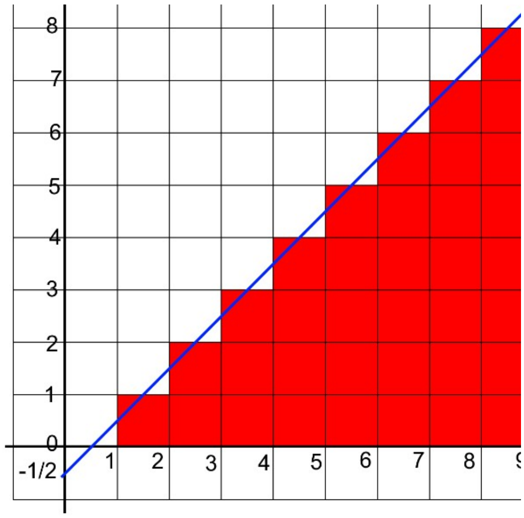
In questo caso i grafici a linee non sono più efficaci,

infatti:



In questo caso il grafico a linea delle somme parziali di 1+1+1+... interseca l’assy y su 0.

Invece, il grafico a istogramma interseca a -1/2:



La retta che taglia i gradini (in particolare passa per i punti medi delle pareti orizzontali di ogni colonna) interseca l'asse y proprio nell'ordinata corrispondente al risultato che troveremo anche numericamente.

Motivazione numerica

La dimostrazione è simile a quella di Ramanujan (che poi vedremo):

a: +1+1+1+1+... = s +

b: +0-2+0-2+... = -2s =

---

c: +1-1+1-1+... = -s

Ma 1-1+1-1+... = 1/2 dunque -s=1/2 e quindi s=-1/2

1+1+1+1+...=-1/2

Collegamento con la serie $x+x^2+x^3+...$

La serie 1+1+1+1+... può essere vista come la serie $x+x^2+x^3+...$ per x = 1, ma la formula per il valore associato non funziona: x/(1-1) non rispetta le condizioni di dominio della funzione x/(1-x).

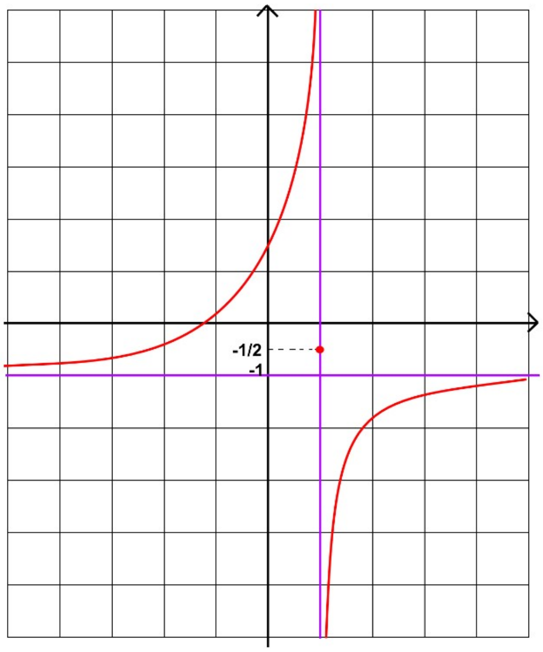
La serie $x+x^2+x^3+...=x/(1-x)$ dunque per x=1 non sarebbe definita.

Se attuiamo il limite per 1^+ e 1^- si nota che:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty$$

Per $x=1$ possiamo però "forzare" la presenza del valore $-1/2$: di seguito un grafico qualitativo di $x/(1-x)$ con il valore $-1/2$ presente per $x=1$:



In viola l'asintoto verticale ($x=1$) e orizzontale ($y=-1$).

La situazione mi sembra asimmetrica.

Più approfondimenti del motivo per cui la formula $x+x^2+x^3+...=x/(1-x)$ abbia una rottura del suo comportamento per $x=1$ potrebbe portare a una migliore comprensione delle serie infinite.

$1+2+3+4+5+... = -1/12$

Somme parziali

Le somme parziali sono:

$s_0 = 0$
$s_1 = 1$
$s_2 = 1 + 2 = 3$
$s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
$s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
…

La somma segue la funzione:

$$y = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

Valore associato euristico

Vi sono vari procedimenti possibili, di seguito il più famoso. Il procedimento è attribuito in particolare al matematico Ramanujan.

1+2+3+4+5+...=s

s-4s=-3s

(1+2+3+4+...)-4(1+2+3+4+...)=-3s

1+2+3+4+...-4-8-12-16-...=-3s

+1+2+3+4+5+6+... = s

-4-8-12-16-... = -4s

dilatiamo la seconda serie di 2:

0-4+0-8+0-12+0-16+...=-4s

Sommiamo le due serie in colonna:

+1+2+3+4+5+6+... = s +

+0-4+0-8+0-12+...=-4s =

1-2+3-4+5-6+...=-3s

Ma 1-2+3-4+...=1/4 come visto in precedenza, dunque

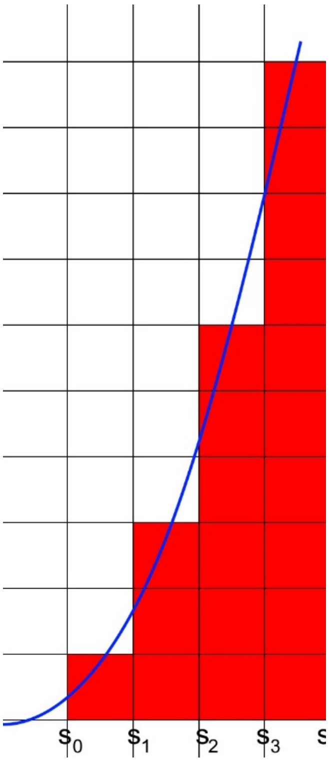
1/4=-3s

s=-1/12

1+2+3+4+5+...=-1/12

Intuizione grafica

Nel seguente grafico la curva passa per tutti i gradini (vedi capitolo 10 e 9 per più informazioni sull’analisi e estrazione valori da grafici) e interseca l’asse y a -1/12.



Il grafico non è molto preciso, è stato fatto con un semplice software da disegno, ed è stato messo per dare un’idea di come sarebbe la curva.

Al momento non mi è chiaro il metodo da usare per generare la curva blu (il metodo usato per 1+1+1+1+... i per 1-2+3-4+... non funziona), seppur per questo singolo caso sono riuscito a trovare che la curva segue la funzione: $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}$

Il grafico può essere trovato anche su Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/1_%2B_2_%2B_3_%2B_4_%2B_%E2%8B%AF)

1+4+9+16+...=0

Somme parziali

$$s_0 = 0$$
$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 + 4 = 5$$
$$s_3 = 1 + 4 + 9 = 14$$
$$s_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$
$$\dots$$

Le somme parziali seguono la funzione:

$$y = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Il calcolo è simile a quello per la serie 1+2+3+4+... e 1+1+1+...:

1+4+9+16+...=s

s-8s=-7s

1+4+9+16+25+... = s

-8(1+4+9+16+25+...)= -8s

1+4+9+16+25+36+... = s

-8-32-72-... = -8s

Dilatiamo la seconda serie di 2 e sommiamo le due serie in verticale:

+1+4+9+16+25+36+... = s

+0-8+0-32+0 -72-... = -8s

+1-4+9-16+25-36+... = -7s

Quest'ultima serie (1-4+9-16+...) dà valore 0 (vedi capitolo 2b).

Dunque -7s=0 → s=0 → 1+4+9+16+...=0

La serie 1+4+9+16+.. è la Zeta di Riemann di 2, così come la serie 1+2+3+4+... è la Zeta di Riemann di 1, e la serie 1+1+1+1+... è la Zeta di Riemann di 0. Vedi capitolo 8 per più approfondimenti sulla Zeta di Riemann.

Tecniche di estrazione valore

Il raccoglimento parziale può essere usato in alcuni casi come per esempio nelle serie geometriche:

es.: 1+2+4+8+16+... = s

1+2(1+2+4+...) = s

Ma non in quelle non geometriche e non stabili (più info nel problema dell'aggiunta: capitolo 5)

es.: 1+2+2+2+2+... = s

1+2(1+1+1+...) NO!

La comparazione con altre serie è possibile, ma solo in colonna (approccio verticale) o se in riga, basato su quello verticale:

es.: 1-1+1-1+... = 1/2 +

1-2+3-4+... = 1/4 =

2-3+4-5+... = 3/4

2-3+4-5+... = 1-1+1-1+... +1-2+3-4+...

Altre serie

Alla luce delle serie prima descritte, possiamo, applicando semplici regole matematiche, trovare altre serie e relativi valori associati, molto importanti:

a-a+a-a+...=a/2

come per esempio 3-3+3-3+...=3/2

a+a+a+a+... = -a/2

come per esempio 3+3+3+...=-3/2

n(1+2+3+4+...) = -n/12

2+4+6+8+10+...=-1/6

e in generale se $x_1+x_2+x_3+...=r$ allora $n(x_1+x_2+x_3+...)=nr$

1h) Funzioni associate e serie generatrici

Funzioni dei termini e delle somme parziali

Per una serie si può individuare una funzione dei termini e una delle somme parziali.

La funzione dei termini indica l'andamento dei termini, la funzione delle somme parziali indica l'andamento delle somme parziali.

Esempio.:

Per la serie 1+2+3+4+5+...

la funzione dei termini è f(x)=x (con x numero naturale escluso 0), i termini seguono infatti questa funzione.

La funzione delle somme parziali è g(x)=x(x+1)/2 (con x naturale escluso 0), le somme parziali seguono infatti questa funzione.

Serie generatrice

La serie che genera come somme parziali una successione di numeri, è detta serie generatrice di quella successione.

Esempio:

0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

(Il primo termine: 0, è la somma nulla)

ha come serie generatrice:

1-1+1-1+1-1+...

Oppure:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...

ha come serie generatrice:

1-2+3-4+5-6+...

Altre funzioni associate

Ad una serie si può associare una funzione che interseca l'asse y sempre all'ordinata pari al valore estratto via metodi euristici dalla serie.

Vedremo queste funzioni tracciate spesso nei grafici istogramma, come linea di andamento generale, "linea riassuntiva".

Il metodo per trovare questa funzione non mi è ancora del tutto chiaro, seppur vedremo qualche caso un po' più approfonditamente al capitolo 10 (Grafici, rilevazione stabilità ed estrazione valori) e al capitolo 9 (Funzioni associate).

Legame tra valori e funzioni

In questo libro ci focalizziamo inizialmente sul processo:

serie → valori

e poi accenneremo al processo:

serie → funzioni → valori

A mio parere, se si verifica una solidità nella connessione tra serie e valori, allora i valori associati acquisiscono validità o importanza, e i modelli matematici euristici possono diventare spunto per un aggiornamento della matematica.

2) Slittamento

2a) Slittamento

Lo slittamento è l'aggiunta di 0 prima di una serie.

Qui di seguito una serie, la sua slittata di 1, e la sua slittata di 2.

a: 1+2+3+4+5+...

a':   0+1+2+3+4+...

a'': 0+0+1+2+3+...

Indichiamo a volte con 1 apostrofo (a') la serie a slittata di 1 termine, con 2 apostrofi (a'') la serie slittata di 2 termini e così via.

Se si indica con d il numero di 0 all'inizio di una serie, d è il numero di slittamento, e la serie è slittata di d.

es.: a'':   0+0+1+2+3+...   d=2

Vediamo ora i valori delle slittate rispetto le originali:

ALTERNATE STABILI

Grazie alla stabilità il risultato non varia.

A: 1-1+1-1+1-1+... = 1/2

A':   0+1-1+1-1-1+... = 1/2

A''; 0+0+1-1+1-1+... = 1/2

Il valore di A' è uguale a A poiché A è stabile.

Grafico a linee e ad istogramma di
1-1+1-1+... :

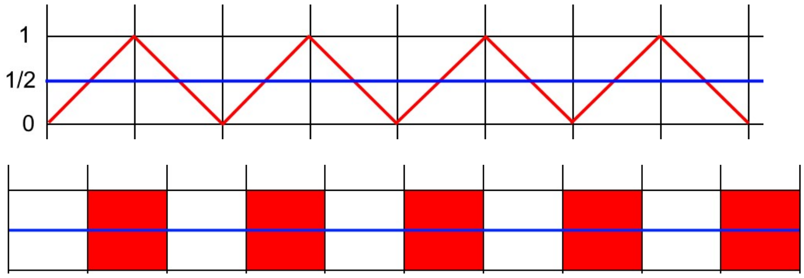


Grafico a linee e ad istogramma di
0+1-1+1-1+...:

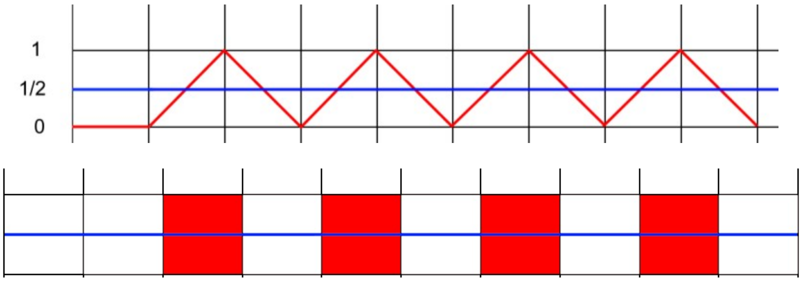
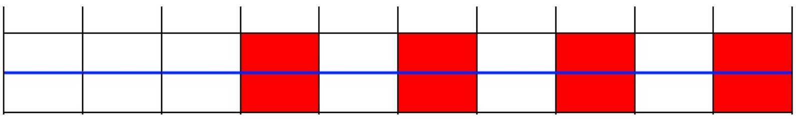


Grafico a istogramma di 0+0+1-1+1-1+...

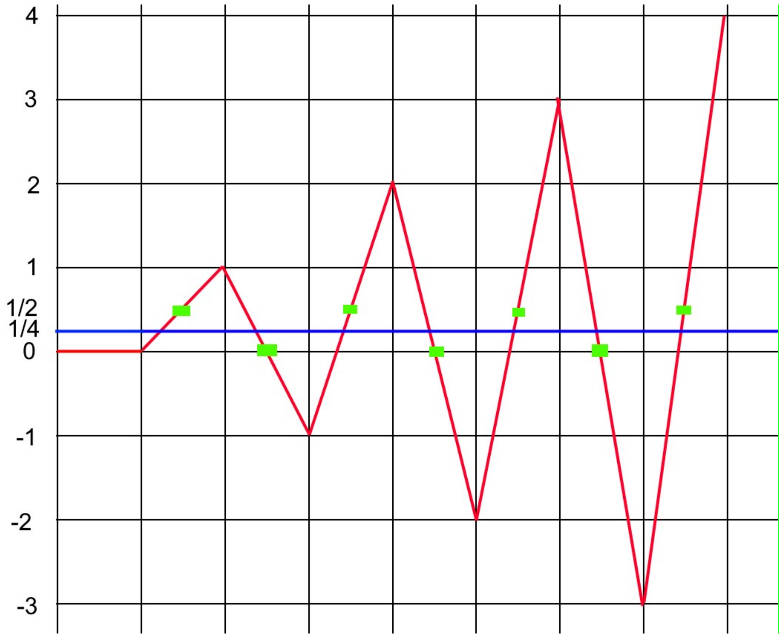


La linea che taglia il grafico interseca in tutti e tre i casi l'asse y all'ordinata 1/2 (1-1+1-1+...=1/2, 0+1-1+1-1+...=1/2, 0+0+1-1+1-1+...=1/2) ed è parallela all'asse x (le serie sono dunque stabili).

La linea trasversale è ottenibile attraverso il procedimento descritto nel capitolo 10.

A: 1-2+3-4+... = 1/4

A’: 0+1-2+3-4+... = 1/4



A’’: 0+0+1-2+3-4+5-6+... = 1/4

In questo secondo esempio ho inserito solo il grafico a linee per semplicità.

Per più approfondimenti sulla verifica della stabilità di una serie a partire dalle somme parziali o dal grafico e dell’estrazione del valore associato vedi capitolo 10.

Sia A una serie alternata stabile, A slittata di n ($A^{(n)}$) avrà lo stesso valore.

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

Il problema ricade nel “problema dell’aggiunta” / “the add problem” spiegato meglio più avanti (vedi capitolo 5)

In generale:

Se A è una serie divergente a termini costanti, A slittata di n NON avrà lo stesso valore.

Esempio:

1+1+1+1+... = -1/2

0+1+1+1+... = -3/2

0+0+1+1+... = -5/2

Il valore può essere calcolabile attraverso approccio verticale (vedi capitolo 5), ossia:

esempio per ricavare 0+1+1+1+...=-3/2:

+1+1+1+1+...=-1/2 +

-1+0+0+0+...=-1 =

0+1+1+1+...= -1/2-1 = -3/2

Notare come lo 0 nelle serie infinite “non sia l’elemento neutro dell’addizione”.

In realtà si potrebbe obbiettare che le somme presenti in queste serie trattate euristicamente non siano somme vere e proprie; oppure che l'= non abbia un vero e proprio significato di equivalenza.

Generalizzazione slittamento per divergenti a termini costanti

Alla luce della risoluzione del problema dell'aggiunta, lo slittamento per serie divergenti a termini costanti può essere generalizzato così:

Per s: 1+1+1+...=-1/2 slittata di n termini:

0+...+0+1+1+1+... (con n 0 iniziali):

$s^{(n)}$: 0+...+0+1+1+1+... = -1/2-n

E in generale per s: a+a+a+...=-a/2 slittata di n termini:

0+...+0+a+a+a+... (con n 0 iniziali):

$s^{(n)}$: 0+...+0+a+a+a+... =-a/2-na

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

Anche questo caso ricade nel "problema dell'aggiunta" / "the add problem"

In generale:

Se A è una serie divergente a termini non costanti, A slittata di n non avrà, generalmente, lo stesso valore.

Esempio:

1+2+3+4+5+...=-1/12

0+1+2+3+4+...= 5/12

0+0+1+2+3+4+...= 23/12

Più informazioni nel capitolo 5 “il problema dell’aggiunta” e capitolo 9 “funzioni associate”.

Le serie geometriche non cambiano valore se slittate, nonostante siano divergenti a termini non costanti

0+2+4+8+16+... = -2

2(0+2+4+8+16+...)=-2*2

0+4+8+16+...=-4

Sommando in colonna (più approfondimenti nel capitolo 5):

0+4+8+16+... = -4 +

2+0+0+0 +... = 2 =

2+4+8+16+... = -2

0+0+2+4+8+16+...=-2

4 (0+0+2+4+8+16+...) = -2*4

0+0+8+16+32+... = -8

Sommando in colonna

0+0+8+16+32+... = -8

2+4+0+0 +0 +... = 6

2+4+8+16+32+... = -2

$0+x+x^2+x^3+... = x/(1-x)$

$x(0+x+x^2+x^3+...) = x^2/(1-x)$

$0+x^2+x^3+x^4+... = x^2/(1-x)$

Sommando in colonna:

$0+x^2+x^3+x^4+... = x^2/(1-x)$

$x+0+0+0+0+... = 0$

$x+x^2+x^3+x^4+... = x^2/(1-x)+x$

$x+x^2+x^3+x^4+... = x/(1-x)$

$x+x^2+x^3+x^4+...=s \rightarrow 0+...+0+x+x^2+x^3+x^4+...=s$

Il motivo per cui le serie geometriche, seppur divergenti a termini non costanti e non a pattern, non cambiano valore se slittate mi è tuttora difficile da comprendere.

Un idea di spiegazione è citata al capitolo 9.

Connessione con la dilatazione

Collegandoci alla dilatazione, si nota come 0+1+0+1+0+1+... sia la 1-slittata di 1+0+1+0+1+0+...

Più informazioni al capitolo 6

2b) Somma a slittamento

La somma a slittamento è una somma di una serie con sé stessa slittata di n posizioni.

È dunque un caso particolare di una semplice somma tra 2 serie, dove la seconda è uguale alla prima con l’aggiunta di uno o più zeri prima del primo termine.

Le due serie devono essere sommate verticalmente (ossia in colonna).

La sua utilità è molto grande per l’estrazione del valore nelle serie stabili (in quanto la loro stabilità assicura il mantenimento dello stesso valore nonostante gli slittamenti).

Sia A: 1-1+1-1+... = 1/2

e A’: 0+1-1+1-1+...

troviamo A+A’ (usiamo il metodo verticale!)

```
A:    1-1+1-1+...      = 1/2      +
A’:   0+1-1+1-...      = 1/2      =
-----------------------------------
A+A’: 1+0+0+0+...      = 2*1/2 = 1
```

Coerente!

Sommando una serie con la sua slittata si è ottenuto un risultato coerente.

Ulteriore esempio:

Sia A: 1-1+1-1+... = 1/2

e A’’: 0+0+1-1+1-1+...=1/2

A:	1-1+1-1+1-...	= 1/2	+
A’’:	0+0+1-1+1-...	= 1/2	=
A+A’’:	1-1+2-2+2-2+...	= 1	

Verifichiamo con altri metodi se

1-1+2-2+2-2+...=1

La serie 2-2+2-2+... è stabile, dunque può essere raccolta.

1-1+(2-2+2-2+...)=s

2-2+2-2+...=1 dunque

1-1+1=s

1=s

Coerente.

1-2+3-4+5-6+...=1/4

Poiché 1-2+3-4+... è stabile dunque si può trovare il suo valore ricorrendo a più somme a slittamento, cioè:

1-2+3-4+5-6+...=s +

0+1-2+3-4+5-...=s (perché è stabile) =

1-1+1-1+1-1+...=2s

E 1-1+1-1+... ricade nel caso prima descritto: 1/2=2s

s=1/4

1-4+9-16+25-36+...=0

La serie è stabile infatti nel grafico a linee si nota che la retta di stabilità è parallela all'asse x.

Grafico a linee per 1-4+9-16+...

La retta che taglia il grafico è y=0 ed è parallela all'asse x, dunque la serie è stabile.

Possiamo quindi applicare lo slittamento senza cambiamenti del valore della serie.

1-4+9-16+...=s   +

0+1-4+9 -...=s   =

1-3+5-7+...=2s=z

Applicando nuovamente la somma a slittamento:

1-3+5-7+...=2s=z

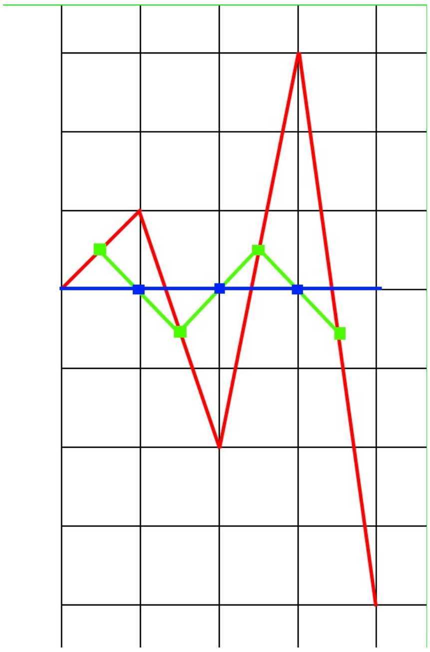


Grafico a linee per 1-3+5-7+... (La linea che taglia il grafico è y=0, è parallela all’asse x, dunque anche questa serie è stabile)

1-3+5-7+...= 2s = z   +

0+1-3+5-...= 2s = z =

1-2+2-2+...= 4s = 2z

1-2+2-2+2-...= 4s = 2z (1-2+2-2+... è stabile) +

0+1-2+2-2+...= 4s = 2z =

1-1+0+0+0+...= 8s = 4z

1-1=0 dunque 8s = 0 quindi s=0 pertanto

1-4+9-16+25-36+...=0

e anche

1-3+5-7+9-11+...=0

In generale per trovare il valore in una serie stabile, è sufficiente applicare la somma a slittamento, e applicarla nuovamente alla serie risultante, sin che il risultato sarà finito.

Proprietà:

serie stabile + serie stabile = serie stabile

Dove la somma è attuata verticalmente (approccio verticale)

Una situazione dove non è corretto applicare la somma a slittamento.

1-2+1-2+1-2+...=y

0+1-2+1-2+1-...= NON y

La somma a slittamento non è banale da applicare, in quanto 1-2+1-2+... non è stabile dunque uno slittamento ne cambia il valore.

2c) Antislittamento

Chiamiamo per comodità il processo inverso dello slittamento antislittamento o slittamento per un fattore negativo intero.

Es.:

0+1+1+1+1+...

anti-slittata di 1, o slittata di -1, diventa:

1+1+1+1+...

Connessione alla dilatazione

Connettendoci alla dilatazione, notiamo che, per esempio, la serie 0+1+0+1+0+1+... sia la (-1)-slittata, ossia antislittata di 1, della serie 1+0+1+0+...

Vedi più informazioni al capitolo 6.

2d) Generalizzazione slittamento

Abbiamo già visto lo slittamento per un numero negativo intero (vedi paragrafo precedente).

Inoltre lo slittamento può essere generalizzato tramite le funzioni associate per tutti i numeri reali (vedi capitolo 9).

Interessante sarebbe capire quali sono, se ci sono, le rappresentazioni numeriche o in serie, delle serie slittate di un fattore non intero.

3) Compressione

Il metodo della compressione è un buon metodo per risolvere alcune serie.

Una compressione può essere attuata per un fattore 1, 2, 3, 4, ...

Essa comporta risoluzioni parziali della serie, in tanti modi diversi (poi esposti) tanti quanti il fattore di compressione; si attua la media tra le varie risoluzioni parziali: la media risulta nel valore associato alla serie di partenza.

Le risoluzioni parziali della serie sfruttano diversi raggruppamenti e somme dei termini.

La compressione è visualizzabile molto facilmente tramite grafici a linee (la rappresentazione tramite grafici istogrammi è meno chiara).

3a) 2-Compressione

La 2-compressione è comodissima in molte occasioni.

La 2-compressione può essere anche chiamata come Up-Down Compressione per via del grafico (poi riportato) che mostra due linee: una sopra e una sotto il grafico principale.

La 2-compressione identifica 2 modi di risoluzione parziale di una serie, ottenendone 2 nuove probabilmente più facili, successivamente si attua la media tra le 2 serie (verticalmente) o tra i valori associati ad esse.

La media tra le due spesso comporta l'elisione di componenti tali che una volta rimosse, il calcolo risulti con una finita quantità di termini.

Non è ancora chiaro il criterio generale per capire se ad una serie può essere applicata la compressione.

Si può applicare la compressione alle serie:
- stabili
- a termini costanti
- a pattern

Non a quelle divergenti a termini non costanti e non pattern però.

Non ho verificato se è possibile applicare la compressione alle serie geometriche.

Ecco esempi caso per caso:

ALTERNATE STABILI

La 2-compressione può essere applicata alle serie alternate stabili come metodo per l'estrazione del valore associato.

1-2+3-4+...=1/4

Ecco i 2 modi di raggruppare in coppie (2 termini: in quanto 2-compressione) la serie:

U: 1+(-2+3)+(-4+5)+(-6+7)+...

D: (1-2)+(3-4)+(5-6)+...

successivamente sommiamo i termini dentro le parentesi:

U: 1+(1)+(1)+(1)+...

D: (-1)+(-1)+(-1)+...

dividiamo in n parti i termini risultanti dalle somme, dove n è il fattore di compressione (nella serie U, il primo termine 1 non deve essere diviso in quanto non proviene da parentesi)

U: 1 + (1/2 + 1/2) + (1/2 + 1/2) + (1/2 + 1/2) +...

D: (-1/2 -1/2) + (-1/2 -1/2) + (-1/2 -1/2) +...

Togliamo le parentesi e facciamo la media tra le due serie (sommiamo in colonna e poi dividiamo per 2):

U: +1   +1/2 +1/2 +1/2 +...   +

D: -1/2 -1/2 -1/2 -1/2 -...   =

1/2   +0 +0   +0

e dividendo per 2 si ha: 1/4

1-2+3-4+... = 1/4 Coerente

Il risultato è coerente con altri tipi di motivazione.

Inoltre se le due nuove serie (U e D) si risolvono con il metodo dell'aggiunta (più avanti sarà visto) si ottiene:

u=1/4 e d=1/4 che di media danno appunto 1/4.

+1   +1/2 +1/2 +1/2 +...   = 1/4   +

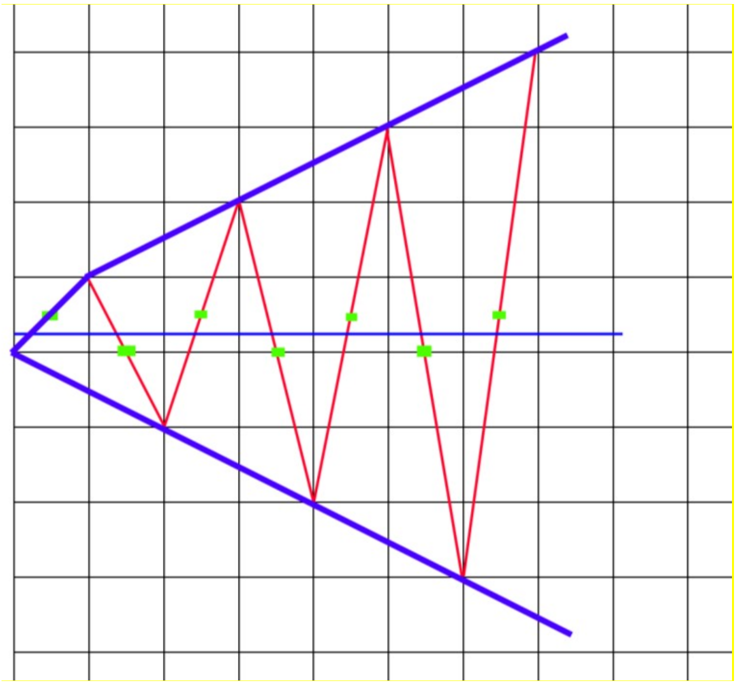
-1/2 -1/2 -1/2 -1/2 -...   = 1/4   =

1/2	+0	+0	+0	+...	/2

1/4

Coerente in entrambi i membri.

Illustrazione grafica



Visualizzazione delle serie up e down compressione.

La parte superiore di linea blu (nel primo quadretto coincide con il grafico rosso) è la U serie (Up serie: 1+1/2+1/2+1/2+...), mentre la parte sotto il grafico rosso la D serie (Down serie: -1/2-1/2-1/2-...).

Il grafico a linee è molto comodo per la rappresentazione del processo di compressione.

In generale per le serie alternate stabili

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$

U è la up compressione, D è la down compressione

S = (U+D)/2 = (u+d)/2

dove u e d sono i valori associati alle serie U e D

La compressione simula quasi la procedura di contornamento superiore e inferiore di un grafico, ciò ricorda la sovrastima e sottostima tipica dell'algoritmo per il calcolo degli integrali.

Altro esempio:

1-1+1-1+... = 1/2

U: 1+(-1+1)+(-1+1)+...

D: (1-1)+(1-1)+...

U: 1+(0)+(0)+(0)+...

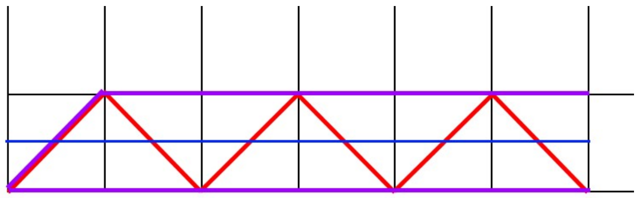
D: (0)+(0)+(0)+...

U: 1+0+0+0+0+... = 1

D: 0+0+0+0+0+... = 0

Media: 1/2 Coerente!

Illustrazione grafica:



Le linea viola superiore (nel primo quadretto coincide con il grafico rosso) è la linea rappresentate la Up serie (1+0+0+0+...), mentre la linea viola inferiore rappresenta la Down serie (0+0+0+...)

Ulteriore esempio.

1-3+5-7+9-11+...=0

U: 1+(-3+5)+(-7+9)+(-11+...

D: (1-3)+(5-7)+(9-11)+...

U: 1+(2)+(2)+(2)+...

D: (-2)+(-2)+(-2)+...

U: +1+1+1+1+1+1+1+... = -1/2 +

D: -1-1-1-1-1-1-1-... = 1/2 =

U+D: 0

(U+D)/2 = 0

1-3+5-7+9-11+...=0

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

È banale, infatti per 1+1+1+1+... (=-1/2) si nota che:

U: 1+(2)+(2)+...

D: (2)+(2)+(2)+...

U: 1+(1+1)+(1+1)+...

D: (1+1)+(1+1)+(1+1)+...

U: 1+1+1+1+1+... +

D: 1+1+1+1+1+... =

U+D: 2+2+2+2+...

S=(U+D)/2 = 1+1+1+1+...

La serie ritorna a quella di partenza, applicare la compressione è irrilevante.

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

Al momento mi sembra che la compressione non possa essere applicata alle serie divergenti a termini non costanti e non a pattern con risultati efficienti e sensati.

3b) 3-compressione

ALTERNATE STABILI

Esempio:

1-2+3-4+5-6+7-8+9-...=1/4

A: (1-2+3)+(-4+5-6)+(7-8+9)+...

B: +1+(-2+3-4)+(5-6+7)+(-8+9-...

C: +1-2+(3-4+5)+(-6+7-8)+9

A: (2)+(-5)+(8)+...

B: +1 +(-3)+(6)+...

C: 1 -2 + (4) + (-7) +...

A:	2/3	+2/3	+2/3	-5/3	-5/3	-5/3	+8/3	+...	+
B:	1	-3/3	-3/3	-3/3	+6/3	+6/3	+6/3	+...	+
C:	1	-2	+4/3	+4/3	+4/3	-7/3	-7/3	+...	=
	8/3	-7/3	+3/3	-4/3	+5/3	-6/3	+7/3	+...	

La serie ottenuta è:

8/3 -7/3 +3/3 -4/3 +5/3 -6/3 +7/3 -...=

1/3 (8-7+3-4+5-6+7-...) =

1/3 (7-5+0+0+0+0+0+...

1-2+3-4+5-6+7-...)=

1/3 (2+1/4) = 1/3 (9/4) = 3/4

(3/4)/3 = 1/4

Coerente!

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

1+1+1+1+...=1/2

Banale.

A: (1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1)+...

B: 1+(1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1)+...

C: 1+1+(1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1)+...

A: (3)+(3)+(3)+...

B: 1+(3)+(3)+(3)+...

C: 1+1+(3)+(3)+(3)+...

A: 1+1+1+1+1+...

B: 1+1+1+1+1+...

C: 1+1+1+1+1+...

La media è la serie iniziale, la compressione è indifferente.

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

Al momento mi sembra che la compressione non possa essere applicata alle serie divergenti a termini non costanti e non a pattern con risultati efficienti e sensati.

3c) n-compressione

In generale una n-compressione porta alla generazione di n nuove serie come risultato intermedio.

ALTERNATE STABILI

Possibile.

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

Indifferente.

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

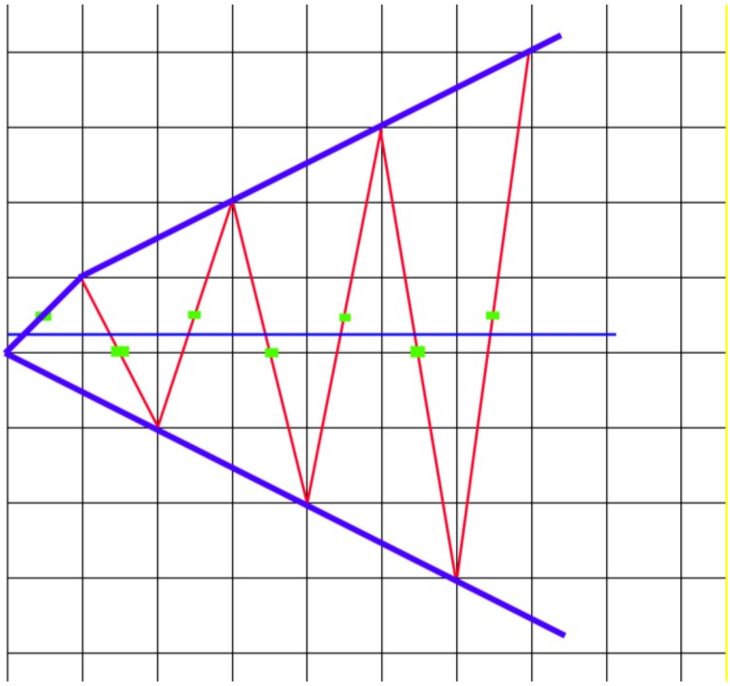
Non possibile.

Le compressioni di un fattore non 2 sembrano essere molto complicate e non molto utili.

Extra

La compressione sembra collegarsi alla compressione dati.

Infatti, per esempio, nel grafico a linee di 1-2+3-4+...=1/4 le linee relative alla serie Up e Down possono essere considerate approssimazioni a bassa risoluzione del grafico rosso: la risoluzione è diminuita e le insenature non sono considerate, le due linee approssimano superiormente e inferiormente il grafico.



Extra

A volte la compressione può dare come una delle serie intermedie una serie che dà come risultato il risultato della serie originale. Ciò è una coincidenza.

Numericamente bisogna stare attenti a non confondere una risoluzione parziale di una serie via metodo di compressione con l’originale o con il suo valore associato.

Attenzione

Esempio: la serie 1-2+3-4+... non deve essere sostituita con -1-1-1-1-... solo perché eseguendo la somma dei termini in coppia si ottiene quest’ultima!

Questo processo è, seppur intuitivo, non ammesso nelle serie infinite non convergenti.

È infatti una parziale e approssimata versione della compressione vera e propria prima descritta.

Bisogna porre attenzione in quanto può confondere dato alcune coincidenze che esso presenta in alcuni casi.

La proprietà associativa applicata a un’infinita quantità di termini non vale nelle serie infinite.

Più info sulle proprietà delle serie infinite al capitolo 11.

4) Espansione

L’espansione è “l’inversa” della compressione.

Esempio: l’espansione inversa della 2-compressione è la
2-espansione

Se la serie:

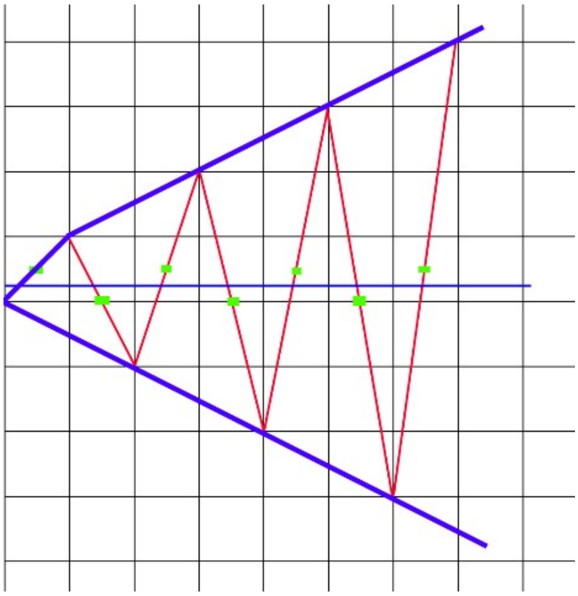
1-2+3-4+5-6+....

può essere 2-compressa in due modi:

A: -1/2-1/2-1/2-....

B: 1+1/2+1/2+1/2+1/2

La serie -1/2-1/2-1/2-... e la serie 1+1/2+1/2+1/2+...
possono essere espanse in 1-2+3-4+5-6+...



In rosso la serie: 1-2+3-4+5-...

In blu sopra la serie: +1+1/2+1/2+1/2+...

e in blu sotto la serie:

-1/2-1/2-1/2-1/2-...

Una serie n-compressa da come serie intermedie n serie, mentre una serie può essere espansa in infiniti modi.

Espansione bidimensionale

Interessante è anche l'espansione bidimensionale, che riscrive una serie come somma di più serie (potenzialmente infinite) in colonna. Abbiamo già visto i casi con una finita quantità di serie, per esempio:

1+2+3+4+5+... → (1+1+1+1+1+...+
0+1+2+3+4+...)

Mentre per una quantità infinita di serie vi sono problemi (vedi capitolo 12 per alcuni esempi).

Al momento non mi è chiaro se quest'ultimo tipo di espansione sia effettivamente un caso 2-dimensionale dell'espansione descritta all'inizio di questo capitolo, oppure sia un altro tipo.

5) Il problema dell’aggiunta / The Add Problem

5a) La problematica

Il problema nasce da una semplice questione:

1+2+2+2+2+... è la serie 2+2+2+2+... con l’aggiunta di 1, oppure è la serie 2+2+2+... con un 1 sottratto al primo 2?

Oppure, nasce anche dal problema:

1+1+1+1+...=z

1+(1+1+1+...)=z

1+z=z

1=0 ASSURDO

Si può dunque raccogliere una parte della serie 1+1+1+1+...?

Superficialmente verrebbe da affermare che poiché sono stati seguiti passaggi validi e il risultato è assurdo, le premesse non sono valide (dunque l’intero affronto euristico alle serie infinite è scorretto).

In realtà se ci si ostina a procedere, si può notare come in realtà sono state infrante alcune condizioni.

5b) Approccio orizzontale e verticale e risoluzione

Vediamo più nel dettaglio il problema per ogni tipo di serie e se eventualmente si presenta.

Vedremo 2 approcci:

- orizzontale
- verticale.

Quello orizzontale è il più intuitivo e coincide con quello verticale nella matematica normale.

Quello verticale è l'approccio corretto per le serie infinite (dove solo qualche volta funziona anche quello orizzontale).

ALTERNATE STABILI

2-1+1-1+1-1+...=3/2

Sapendo che 1-1+1-1+1-1+...=1/2

Quanto è 2-1+1-1+1-1+... ?

Approccio orizzontale:

2-1+1-1+... = 2-(1-1+1-...) = 2-1/2 = 3/2

Approccio verticale:

1-1+1-1+... = 1/2 +

1+0+0+0+... = 1 =

2-1+1-1+... = 3/2

Verticale = Orizzontale

Gli approcci orizzontale e verticale portano a stessi risultati nelle serie alternate stabili.

Altro esempio:

0-1+1-1+... = ?

VERTICALE:

+1-1+1-1+... = 1/2   +

-1+0+0+0+... = -1   =

0-1+1-1+... = 1/2-1 = -1/2

0-1+1-1+...=-1/2

ORIZZONTALE: 0-1/2 = -1/2

Coerente, dunque: 0-1+1-1+...=-1/2

Altro esempio:

Sapendo che: 1-2+3-4+...=1/4

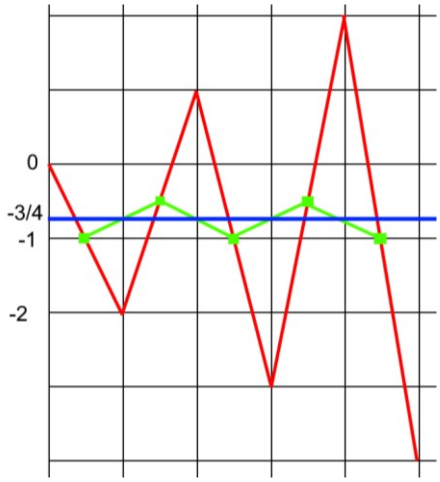
e dunque che -1+2-3+4-...=-1/4

e che -1+1-1+...=-1/2

Quando dà -2+3-4+...=?

ORIZZONTALE

Si analizza il grafico (usiamo il grafico a linee in quanto la serie è stabile): il valore estratto è 3/4.



VERTICALE 1:

A: -1+2-3+4-...= -1/4 +

B: -1+1-1+1-...= -1/2 =

S: -2+3-4+5-...= -1/4-1/2 = -3/4

VERTICALE 2:

A: +1-2+3-4+5-6+... = 1/4 +

B: -1+0+0+0+0+0+... = -1 =

+0-2+3-4+5-6+... = 1/4 -1

0-2+3-4+5-6+... = -3/4

La serie -2+3-4+5-6+... è stabile dunque -2+3-4+5-6+... ha lo stesso valore di 0-2+3-4+5-6+...

-2+3-4+5-6+...=-3/4

Coerente.

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

Come già accennato prima, la critica alle serie infinite risolte euristicamente parte spesso dalla critica alla situazione paradossale causata dal raccoglimento:

1+1+1+...=s

1+(1+1+...)=s

1+s=s

1=0 Assurdo

Ciò porta alcuni a ritenere non validi i metodi euristici per le serie infinite.

In realtà non sono state rispettate alcune condizioni e regole (l'approccio verticale è quello richiesto nelle serie infinite).

Approfondiamo il problema con un esempio più semplice: sappiamo che

1+1+1+...=-1/2

2+1+1+1+... quanto dà?

Ci sono i 2 approcci possibili:

ORIZZONTALE:

2+(1+1+1+...) = 2 -1/2 = 3/2

VERTICALE:

a: 1+1+1+... = -1/2 +

b: 1+0+0+... = 1 =

-1/2 + 1 = 1/2

2+1+1+1+1+...=1/2

Quale dei 2 risultati considerare corretto? 3/2 o 1/2?

Il metodo della compressione ci aiuta.

Attuando infatti la compressione per la serie 1-2+3-4+... si può notare che compare una serie che è metà di quella che stiamo studiando:

U: 1 +1/2 +1/2 +1/2 +... = x

D: -1/2-1/2 -1/2 -1/2 -... = 1/4

Sappiamo già che la serie 1-2+3-4+...=1/4 quindi:

1/4 = (x + 1/4)/2

ossia 1/4 è la media tra il valore associato alla U serie e il valore associato alla D serie.

Quindi x=1/4 cioè 1+1/2+1/2+1/2+...=1/4 pertanto

2+1+1+1+1+...=1/2

L’approccio verticale risulta valido e corretto.

Se si dovesse usare l'approccio orizzontale sempre, allora molte contraddizioni ed equivoci emergerebbero come per esempio:

1+1+1+1+... sarebbe equivalente sia a

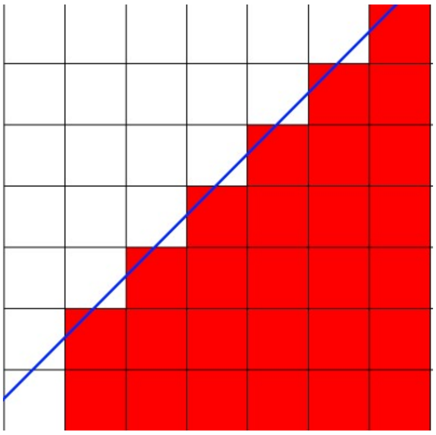
1+(1+1+1+...) = 1-1/2

sia a 1+1+(1+1+1+...) = 2-1/2

eccetera.

L'approccio orizzontale è non consistente nel caso di divergenti a termini costanti. Poi vedremo che non lo sarà anche in altri casi.

Dunque l'approccio verticale è corretto, mentre l'approccio orizzontale è generalmente non valido.



Sopra un grafico istogramma che visualizza la serie 2+1+1+1+...: la linea blu interseca l'asse y a 1/2 infatti 2+1+1+1+...=1/2

In modo analogo 0+1+1+1+... = -3/2

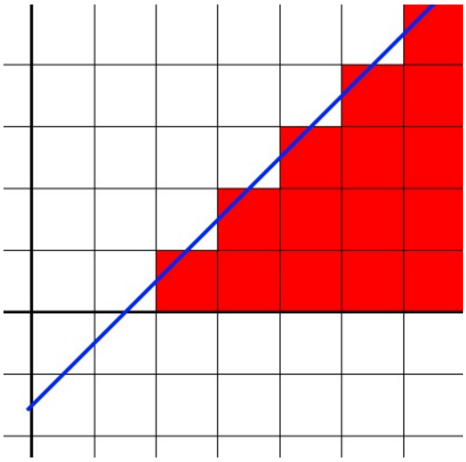
infatti:

a: +1+1+1+1+1+...=-1/2 +

b: -1+0+0+0+0+...=-1 =

---

c: +0+1+1+1+1+...=-3/2 (dove c=a+b)



Nel grafico, la retta che taglia i gradini interseca l’asse y a -3/2. Vi è dunque ulteriore validità del risultato.

(Con l’approccio orizzontale 0+1+1+1+... sarebbe ancora risultato -1/2).

Notiamo che il caso 0+1+1+1+... coincide con il caso di slittamento delle serie divergenti a termini costanti.

Formula dell'aggiunta per divergenti a termini costanti

In generale:

n+a+a+a+... = -a/2 + (n-a)

per n in qualsiasi posizione

Ulteriore esempio:

+0+0+1+1+1+... = -5/2

+1+1+1+1+1+... =-1/2 +

-1-1+0+0+0+... =-2 =

+0+0+1+1+1+... =-5/2

Generalizzazione slittamento per divergenti a termini costanti

Alla luce della risoluzione del problema dell'aggiunta, lo slittamento per serie divergenti a termini costanti può essere generalizzato così:

Per s: 1+1+1+...=-1/2 slittata di n termini:

0+...+0+1+1+1+... (con n 0 iniziali):

$s^{(n)}$: 0+...+0+1+1+1+... = -1/2-n

E in generale per s: a+a+a+...=r=-a/2 slittata di n termini:

0+...+0+a+a+a+... (con n 0 iniziali):

$$s^{(n)}: 0 + \cdots + 0 + a + a + a + \cdots = r - na$$

$$s^{(n)}: 0 + \cdots + 0 + a + a + a + \cdots = -\frac{a}{2} - na$$

Ulteriore esempio (termini eccezione non consecutivi)

+0+1+0+1+1+... = -5/2

+1+1+1+1+1+... =-1/2 +

-1+0-1+0+0+... =-2 =

+0+1+0+1+1+... =-5/2

+0+1-2+1+1+... = -9/2

+1+1+1+1+1+... =-1/2 +

-1+0-3+0+0+... =-4 =

+0+1-2+1+1+... =-9/2

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

Sapendo che 1+2+3+4+...=-1/12

Quanto dà 2+3+4+...=7/12

Il problema si risolve con l'approccio verticale come nei casi precedenti.

A: 1+2+3+4+5+...=-1/12 +

B: 1+1+1+1+1+...=-1/2 =

C: 2+3+4+5+6+...= -1/12-1/2 = -7/12

con C=A+B

Con l’approccio orizzontale si sarebbe potuto dire che 2+3+4+... = -1/12-1 ma l’approccio orizzontale se applicato in altre occasioni, come già spiegato, si mostra inconsistente, dà infatti risultati spesso contraddittori.

Altro esempio:

0+1+2+3+4+...=5/12

A: +1+2+3+4+5+...=-1/12   +

B: -1-1-1-1-1-...=1/2   =

C: 0+1+2+3+4+...=-1/12+1/2=5/12

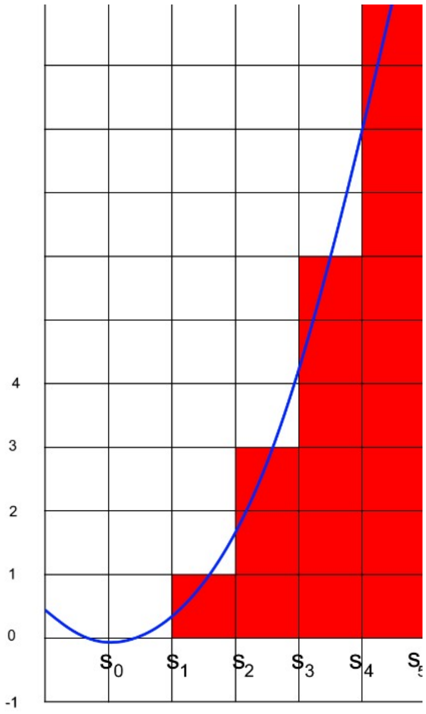
con C=A+B

È molto controintuitivo il fatto che aggiungendo uno 0 all’inizio di una serie divergente il risultato cambi.

Certo, se pensiamo che l’uguale o la somma in questi casi euristici non abbiano il loro usuale significato, allora la problematica scompare quasi del tutto.

Visualizzazione del 5/12

Se andiamo ad osservare la funzione associata alle somme parziali e la linea riassuntiva del grafico delle somme parziali, notiamo come sia una parabola con vertice sull’asse y. Per x<0 la curva è decrescente.



Per x=0 la linea blu ha ordinata di circa 0.5, valore vicino a 5/12, a cui si è arrivati numericamente.

Il grafico senza la prima colonna è uguale al grafico di 1+2+3+4+... (vedi capitolo 1 paragrafo serie famose)

Il disegno non è preciso perché è fatto con semplici applicazioni da disegno e non software matematici.

Inoltre non mi è chiara la procedura per trovare la curva, come nel caso del grafico di 1+2+3+4+..., la curva è qualitativa.

Graficamente si riesce a trovare un senso al valore 5/12.

Inoltre 0+1+2+3+4+5+...=5/12 dimostra consistenza e coerenza nelle operazioni con altre serie.

Le serie infinite in metodi euristici sono il riflesso della funzione delle somme parziali della serie.

La funzione delle somme parziali della serie 1+2+3+4+... è infatti una parabola: $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$

Più approfondimenti sulle funzioni associate al capitolo 8.

0+0+1+2+3+4+5+...=23/12

La procedura è analoga a quelle precedenti.

+1+2+3+4+5+6+...=-1/12 +

-1-2-2-2-2-2-....= 2 =

0+0+1+2+3+4+...=-1/12+2=23/12

Ricordiamoci infatti che -1-2-2-2-... è:

-(1+2+2+2+...) e 1+2+2+2+... dà valore: -2/2-1 = -2

Dunque -1-2-2-2-... = 2

Quindi 0+0+1+2+3+4+...=23/12

La visualizzazione del risultato nel grafico + parabola è analoga a quella per 0+1+2+3+4+.... (Attenzione: nel grafico sopra riportato la curva non interseca il punto 23/12, ma si avvicina soltanto, in quanto il grafico non è preciso, scusate l’approssimazione).

Al momento non è disponibile una formula generale per il problema dell’aggiunta nelle serie a termini non costanti.

Un caso interessante è quello che coincide con lo slittamento delle serie geometriche.

Per esempio quanto dà 0+2+4+8+16+...?

2+4+8+16+...=-2 e anche 0+2+4+8+16+...=-2

Una serie geometrica slittata non cambia valore;

lo si è visto al capitolo 2: slittamento.

Esempio:

+2+4+8+16+32+... = -2 +

-2-2-4-8 -16+... = 0 =

0+2+4+8 +16+... = -2

5c) Più esempi importanti

0+2+3+4+5+...=-13/12

+1+2+3+4+5+...=-1/12 +

-1+0+0+0+0+...=-1 =

0+2+3+4+5+...=-13/12

1+3+5+7+9+... = 1/3

a: +1+2+3+4+5+... = -1/12 +

b: -1-1-1-1-1-... = 1/2 =

---

c: +0+1+2+3+4+... = 5/12 (c=a+b)

a: +1+2+3+4+5+... = -1/12 +

c: +0+1+2+3+4+... = 5/12 =

---

d: +1+3+5+7+9+... = 4/12 = 1/3 (d=a+c)

La formula per le somme parziali di 1+3+5+7+... è:

$$y = x^2$$

infatti:

$s_0 = 0$
$s_1 = 1$
$s_2 = 1 + 3 = 4$
$s_3 = 1 + 3 + 5 = 9$
$s_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
…

-1+0+1+2+3+4+5+... =11/12

+1+2+3+4+5+...=-1/12

-2-2-2-2-2-...=1

-1+0+1+2+3+...=-1/12+1=11/12

-2-1+0+1+2+3+4+...=17/12

+1+2+3+4+5+...=-1/12

-3-3-3-3-3-...=3/2

-2-1+0+1+2+...=17/12

6) Dilatazione

La dilatazione non è l’inversa della compressione, seppur può sembrare che lo sia.

Una dilatazione è per un fattore n positivo intero.

La 2 dilatazione è molto importante.

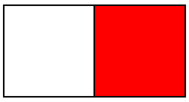
6a) 2-dilatazione

La 2-dilatazione è la dilatazione per il fattore 2.

Ci sono 2 tipi principali di 2-dilatazione: 0x e x0, in più vi è quella paritaria/simmetrica.

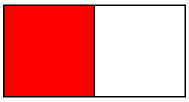
0x Dilatazione

a+b+c+d+... → 0+a+0+b+0+c+0+d+...



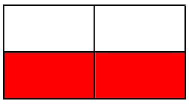
x0 Dilatazione

a+b+c+d+... → a+0+b+0+c+0+d+0+...



Dilatazione simmetrica/paritaria

a+b+c+d+... → a/2+a/2+b/2+b/2+...



Nei nomi (0x, x0) x indica un termine originario della serie.

2-dilatazione 0x

ALTERNATI STABILI

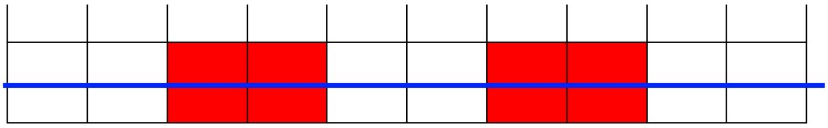
Una serie stabile 0x dilatata non cambia valore.

Esempio:

1-1+1-1+... =1/2

0+1+0-1+0+1+0-1+... = 1/2

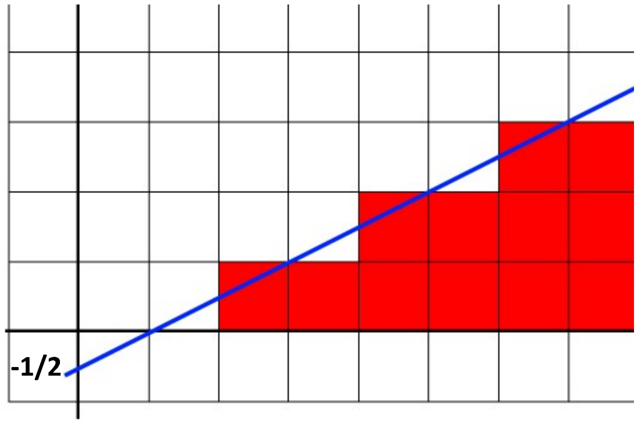
Intuizione grafica



DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

Sapendo che 1+1+1+... = -1/2

0+1+0+1+0+1+... = ?



(Nota: dobbiamo ricordarci che c'è sempre un primo "scalino nullo" come nel grafico di 1+1+1+...)

0+1+0+1+0+1+...=-1/2

Se si schiaccia il grafico orizzontalmente per un fattore 2, si ottiene lo stesso grafico di 1+1+1+...=-1/2. Dunque se ci sono 2 grafici identici, devono per forza avere le stesse proprietà grafiche, come quella della linea riassuntiva e dunque: anche il grafico di 0+1+0+1+... ha la linea riassuntiva che interseca l'asse y a -1/2.

1+1+1+...=-1/2 e 0+1+0+1+0+1+...=-1/2

Possiamo anche trovare il risultato via compressione (vedi più dettagli nel capitolo dedicato)

X: 0 +1 +0 +1 +...

U: 0 +1/2 +1/2 +1/2 +...

D: 1/2 +1/2 +1/2 +1/2 +...

U+D: 1/2 +1 +1 +1 + ...

(U+D)/2: 1/4 +1/2 +1/2 +... = -1/4 -1/4 = -1/2

Coerente

In generale:

Una serie divergente a termini costanti 0x dilatata ha lo stesso valore della serie originale.

0+a+0+a+0+a+...=-a/2

Prende dunque senso la “dimostrazione” per 1+1+1+...=-1/2 che parte da:

1+1+1+1+...=s

2+2+2+2+...=2s

-2-2-2-2-...=-2s

0-2+0-2+0-2+...=-2s

dunque

1+1+1+1+...=s

0-2+0-2+...=-2s (è sempre -2s)

1-1+1-1+...=-s

s=-1/2

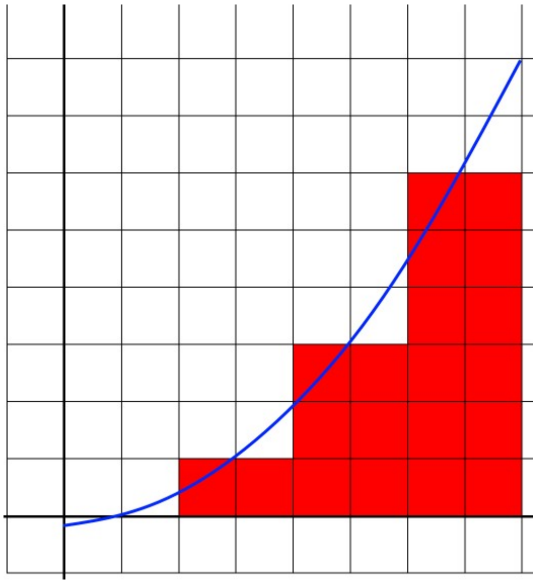
Notiamo che la serie 0+1+0+1+0+1+... è la serie 1+0+1+0+... slittata di -1.

E in modo analogo per le serie 0+a+0+a+... di a+0+a+0+...

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

Sapendo che 1+2+3+4+...=-1/12

0+1+0+2+0+3+... = ?



Se schiacciamo il grafico orizzontalmente di un fattore 2 si ottiene il grafico di 1+2+3+4+...

Dunque sarebbe assurdo se uno stesso grafico avesse due linee riassuntive, dunque anche 0+1+0+2+0+3+...=-1/12

Una serie divergente a termini non costanti 0x dilatata ha lo stesso valore della serie originale.

Prende dunque validità la dimostrazione di Ramanujan per -1/12:

che parte da:

1+2+3+4+5+6+... = s

-4-8-12-16-... = 4s

-4s = 0-4+0-8+0-16+...

La 0x dilatazione infatti non influisce sul valore della serie

1+2+3+4+5+6+... = s +

0-4+0-8+0-16+...=-4s (è anche qui -4s) =

1-2+3-4+5-6+... =-3s

1/4 = -3s

s=-1/12

Coerente.

Notiamo che una serie 0+1+0+2+0+3+... è la serie 1+0+2+0+3+0+... slittata di -1.

E in generale per una serie $0+x_1+0+x_2+...$ di $x_1+0+x_2+0+...$

2-dilatazione x0

ALTERNATE STABILI

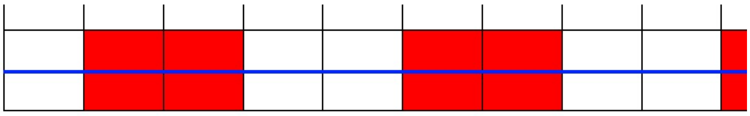
Una serie alternata stabile non cambia valore se x0 dilatata

Esempio:

1-1+1-1+...=1/2

1+0-1+0+1+0-1+0+... = 1/2

Intuizione grafica



l’intersezione avviene sempre a ordinata 1/2.

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

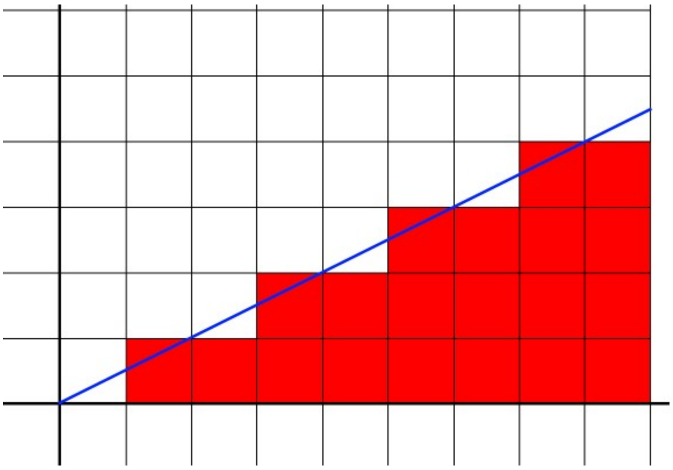
Analizziamo il caso per:

1+0+1+0+1+0+...

A primo impatto verrebbe da pensare che anche questa sia equivalente a quella 0+1+0+1+...=-1/2, ma non è così.

1+0+1+0+1+0+... = 0

Osserviamo il grafico:



La retta blu interseca l’asse y a 0.

Via Compressione infatti:

```
X:     1    +0    +1    +0    +...


U:     1    +1/2 +1/2 +1/2 +...       +
D:     1/2 +1/2 +1/2 +1/2 +...       =
------------------------------------------
D+U:  3/2 +1    +1    +1   +...
(D+U)/2:    3/4 +1/2 +1/2 +1/2 +... = -1/4+1/4 = 0
```

Inoltre il risultato si può ottenere anche da:

```
A:     1+1+1+1+1+1+...=-1/2    +
B:     0+1+0+1+0+1+...=-1/2    =
------------------------------------------
C:     1+0+1+0+1+0+...=0
```

Dove C=A-B

Dunque 1+0+1+0+1+0+...=0 e

In generale: a+0+a+0+a+0+...=0

Dunque anche la disposizione influisce nel risultato o valore associato (0+1+0+1+... non ha lo stesso valore di 1+0+1+0+... nonostante abbiano gli stessi termini sommati; vedi proprietà commutativa nel capitolo 11: modello)

Notiamo che la serie 0+1+0+1+0+1+... è la serie 1+0+1+0+1+0+... slittata di 1.

+1+0+1+0+1+0+...=0

-1+1-1+1-1+1-...=-1/2

0+1+0+1+0+1+...=-1/2

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

1+0+2+0+3+0+4+0+...=1/24

Graficamente non è semplice intuire questo risultato, ma numericamente sì.

Spiegazione numerica

1+0+2+0+3+0+4+0+...=s

2+0+4+0+6+0+8+0+...=2s

+1+3+5+7+9+... = 1/3 +

+2+2+2+2+2+... = -1 =

+3+5+7+9+11+...= 1/3 – 1 = -2/3

3+5+7+9+11+...=-2/3

0+3+0+5+0+7+...=-2/3 (0x dilatazione)

0-3+0-5+0-7+...=2/3

2+0+4+0+6+0+8+0+...=2s +

0-3+0-5+0-7+...=2/3 =

2-3+4-5+6-7+...=2s+2/3

-2+3-4+5-6+7-8+...=-2s-2/3

Per stabilità di -2+3-4+5-6+... :

1+(-2+3-4+...) = (-2s-2/3)+1

1/4 = -2s-2/3+1

1/4 +2/3-1 = -2s

-1/12 = -2s

s= 1/24

Dunque

1+0+2+0+3+0+4+0+ ... = 1/24

1+0+3+0+5+0+7+0+...=1/12

Questa serie non deve essere confusa con quella
1+3+5+7+...

Il valore di questa serie è molto facile da ottenere:

1+2+3+4+5+...=-1/12

2+4+6+8+12+... = -1/6

0+2+0+4+0+6+... = -1/6 (0x dilation)

0-2+0-4+0-6+... = 1/6

allora

a: 1+2+3+4+5+6+...=-1/12   +

b: 0-2+0-4+0-6+... = 1/6   =

---

c: 1+0+3+0+5+0+... = -1/12 + 1/6 = 1/12

dove c=a+b

Dunque 1+0+3+0+5+0+... = 1/12

Per ora non vi è un metodo immediato per l'identificazione di un valore di una serie x0 dilatata a partire da una serie divergente a termini non costanti con la manipolazione diretta delle serie, ed è invece comodo usare le funzioni associate, vedi capitolo 9.

Notiamo che la serie 1+0+2+0+3+0+... è la serie 0+1+0+2+0+3+... slittata di -1; e in generale una serie $x_1+0+x_2+0+x_3+0+...$ di $0+x_1+0+x_2+0+x_3+0+...$

2-dilatazione simmetrica/paritaria

ALTERNATE STABILI

Esempio:

1-1+1-1+... dilatata simmetricamente diventa: 1/2+1/2-1/2-1/2+...

La serie si può calcolare come somma delle relative 0x e x0 dilatate divise poi per 2.

0 +1/2 +0 -1/2 +0 +1/2 +0 -1/2 +...=1/4 +

1/2 +0-1/2 +0 +1/2 +0 -1/2 +0 +...=1/4 =

1/2+1/2-1/2-1/2+1/2+1/2-1/2-1/2+...=1/2

Il valore è uguale a quello della serie di partenza

infatti in generale:

sia A serie stabile: $x_1+x_2+x_3+x_4+... = s$ (le dilatate 0x e x0 hanno lo stesso valore)

$1/2\ (0+x_1+0+x_2+0+x_3+0+x_4+...) = 1/2*s$ +

$1/2\ (x_1+0+x_2+0+x_3+0+x_4+0+...) = 1/2*s$ =

$1\ (x_1+x_1+x_2+x_2+x_3+x_4+x_4+...) = 1s$

$x_1+x_1+x_2+x_2+x_3+x_4+x_4+...=s$

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

a+a+a+... → a/2 +a/2 +a/2 +a/2 +...

La serie ha valore mezzo di quella iniziale

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

Non è noto un metodo semplice per la rilevazione del valore (la serie infatti dipende dalla x0 dilatazione di una serie divergente a termini non costanti).

6b) 3-dilatazione

Una serie può essere dilatata di un fattore 2, così come di un fattore n intero positivo come per esempio 3.

Essendo la 3-dilatazione, una dilatazione per un fattore 3, vi saranno 3 serie intermedie principali: x00, 0x0, 00x (dove x rappresenta il termine originario della serie), e in più possiamo analizzare quella paritaria.

Esempio:

a+b+c+d+... →

00x) 0+0+a+0+0+b+0+0+c+...

0x0) 0+a+0+0+b+0+0+c+0+...

00x) 0+0+a+0+0+b+0+0+c+...

paritaria) a/3+a/3+a/3+b/3+b/3+b/3+c/3+c/3+c/3+...

3-dilatazione 00x

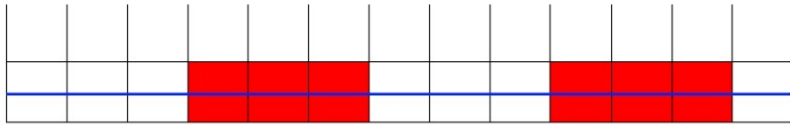
ALTERNATE STABILI

Come nella 2-dilatazione 0x, una 3-dilatazione 00x in un'alternata stabile non cambia il valore di una serie.

1-1+1-1+... = 1/2 →

➔ 0+0+1+0+0-1+0+0+1+0+0-1+...=1/2

Illustrazione grafica



La linea blu interseca l'asse y a 1/2 come la serie 1+1+1+1+...=-1/2

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

0+0+1+0+0+1+...=-1/2

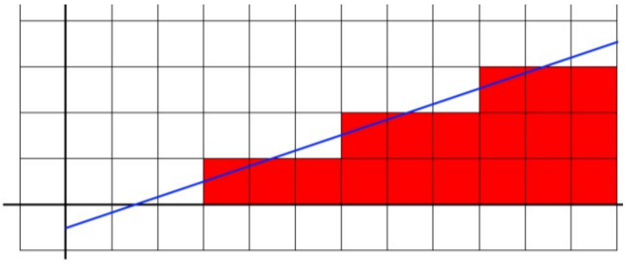
0+0+a+0+0+a+...=-a/2

Allo stesso modo per la spiegazione per 2-dilatazione 0x, il grafico orizzontalmente compresso di una serie 00x dilatata, risulta nel grafico di a+a+a+... dunque entrambe le serie devono avere lo stesso valore altrimenti si cadrebbe in un assurdo.

La 3-dilatazione 00x non cambia il valore di una serie a termini costanti

Fra poco illustreremo una formula generale per le n-dilatazioni di tipo 0...x

Illustrazione grafica



La retta blu interseca a -1/2 l’asse y.

La 3-compressione può essere applicata alla serie 0+0+1+0+0+1+... con successo per trovarne il valore.

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

Allo stesso modo per la spiegazione per 2-dilatazione 0x, il grafico orizzontalmente compresso (non nel senso di compressione di una serie) di una serie 00x dilatata per un fattore 3, risulta nel grafico di a+b+c+... dunque entrambe le serie devono avere lo stesso valore altrimenti si cadrebbe in un assurdo.

La 3-dilatazione 00x non cambia il valore di una serie a termini non costanti

3-dilatazione 0x0

ALTERNATE STABILI

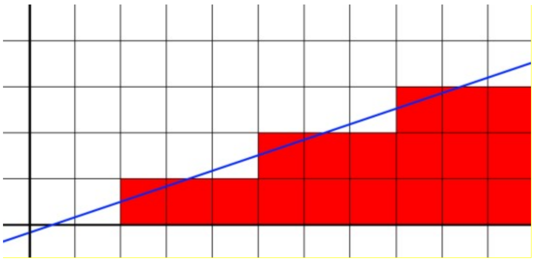
Il valore non viene cambiato. Motivazioni analoghe a quelle riportate per la 2-dilatazione per le serie stabili.

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

Esempio per:

1+1+1+1+... → 0+1+0+0+1+0+0+1+0+...=-1/6

Illustrazione grafica



Questo grafico non è fatto molto bene, ma geometricamente si può calcolare che la retta blu interseca l'asse y a -1/6

in generale: 0+a+0+0+a+0+...=-a/6

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

Al momento non è nota una procedura che utilizza la manipolazione delle serie direttamente.

Bisogna affidarsi alle funzioni associate (vedi capitolo 9).

Grazie alle funzioni associate alle somme parziali si riescono a trovare ulteriori risultati.

Come per esempio:

0+1+0+0+2+0+0+3+0+...=-1/36

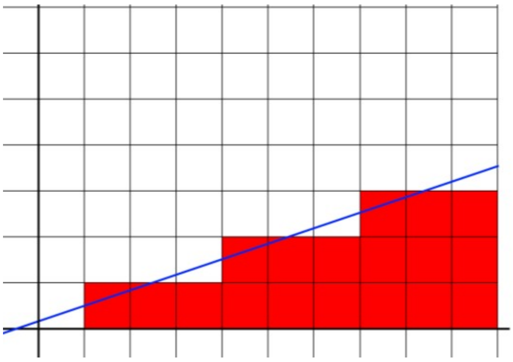
3-dilatazione x00

ALTERNATE STABILI

Il valore non viene cambiato come nella 2-dilatazione.

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

Per 1+1+1+... → 1+0+0+1+0+0+...=1/6



Se si analizza geometricamente il grafico si nota che la retta blu interseca l’asse y a 1/6.

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

Al momento non ho una procedura per la manipolazione diretta delle serie.

È necessario usufruire delle funzioni associate (vedi capitolo 10:

1+0+0+2+0+0+3+0+0+...=5/36

3-dilatazione paritaria

La 3-dilatazione è analoga simile alla 2-dilatazione paritaria. La spiegazione è omessa per brevità.

6c) n-dilatazione e formula generale

ALTERNATE STABILI

Ogni n-dilatazione su una serie alternata stabile non cambia il valore della serie

Dunque una dilatazione 0x, x0, 00x, 0x0, 000x, 000x00, ... non cambia il valore della serie alternata stabile

DIVERGENTI A TERMINI COSTANTI

Considerando come esempio la 3-dilatazione e comparandone i casi si nota come i valori della serie dilatata siano in funzione della posizione p del termine.

Si può ricavare una formula generale per i valori delle dilatate di un fattore n positivo (1,2,3,4,...):

1+1+1+1+...

La sua dilatata di d, dove il termine è posizionato tra gli 0 alla posizione p dà valore:

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{d-p}{d}$$

Esempi di d e p:

Dilatiamo la serie 1+1+1+...=-1/2

0+0+1+0+0+1+... = -1/2

0+0+1+0+0+1+... (d=3, p=3)

0+0+1+0+0+1+...=-1/2+(3-3)/3 = -1/2

0+1+0+0+1+0+...=-1/6

0+1+0+0+1+0+... (d=3, p=2)

0+1+0+0+1+0+...=-1/2+(3-2)/3=-1/6

0+1+0+1+0+1+ ...=-1/2

0+1+0+1+0+1+...   (d=2, p=2)

0+1+0+1+0+1+ ...=-1/2+(2-2)/2 = -1/2

1+0+0+1+0+0+... = 1/6

1+0+0+1+0+0+... (d=3, p=1)

1+0+0+1+0+0+... = -1/2+(3-1)/3 = 1/6

0+0+0+1+0+0+0+1+...=-1/2

0+0+0+1+0+0+0+1+... (d=4, p=4)

0+0+0+1+0+0+0+1+...=-1/2+(4-4)/3 = -1/2

0+1+0+0+0+1+0+0+... = 0

0+1+0+0+0+1+0+0+...   (d=4,p=2)

0+1+0+0+0+1+0+0+... = -1/2+(4-2)/4=0

1+1+1+1+...=-1/2

1+1+1+1+...   (d=1, p=1)

1+1+1+...=-1/2+(1-1)/1 =-1/2

Nota:

0+1+0+0+0+1+0+0+...=0

0+0+0+1+0+0+0+1+...=-1/2

0+1+0+1+0+1+0+1+...=-1/2

Coerente in tutti e due i membri.

E anche:

1+0+0+1+0+0+... = 1/6

0+1+0+0+1+0+... = -1/6

0+0+1+0+0+1+... = -1/2

1+1+1+1+1+1+... = -1/2

Coerente in tutti e due i membri.

E in generale per una serie:

a+a+a+a+... =-a/2

La dilatata del fattore d, con il termine a alla p-esima posizione negli zero (p da 1 a d) darà valore:

$$y = -\frac{a}{2} + \frac{a(d-p)}{d}$$

0+4+0+0+4+0+... = -2/3

4+4+4+... dilatata con (d=3, p=2):

0+4+0+0+4+0+... = -4/2+4(3-2)/3 = -2/3

DIVERGENTI A TERMINI NON COSTANTI, NON PATTERN

Non è disponibile al momento un metodo generale via manipolazione diretta delle serie per la dilatazione per fattore di dilatazione d e posizione p del termine originario della serie.

Ci si deve affidare a “dimostrazioni” numeriche, solitamente non semplici, oppure all’uso delle funzioni associate (vedi capitolo 9).

Extra

Ricordiamo che la dilatazione di tipo 0....x (x ultima posizione) corrisponde alla dilatazione attraverso le funzioni associate, mentre le dilatazioni non 0...x sono, attraverso le formule associate, dilatazioni + traslazioni (slittamenti).

Dilatazione^n

La dilatazione si può applicare più volte (per “dilatazione alla n” si intende l’applicazione di una dilatazione n volte)

se la serie 1+1+1+1+... è x0 dilatata e poi 0x dilatata risulta:

1+1+1+1+... → 1+0+1+0+... → 0+1+0+0+0+1+0+0+...

Si ottiene dunque una 0x00 dilatata di 1+1+1+...

x0, poi x0, risulta come x000

0x, poi 0x, risulta come 000x

Per trovare il nome della dilatazione finale, bisogna dunque applicare le dilatazioni ai termini di dilatazioni.

Possiamo inoltre facilmente generalizzare l'applicazione di una dilatazione n-volte tramite le funzioni associate (vedi capitolo 9).

6d) Più esempi importanti

Grazie alla formula della dilatazione si possono rileggere in un'altra ottica alcune serie già spiegate:

1-2+3-4+5-6+... = 1/4

1+0+3+0+5+0+... = 1/12 (già visto)

-2-4-6-8-12-... = -2(1+2+3+..) =1/6

0-2+0-4+0-6+...=1/6 (stesso valore perché 0x dilatazione)

1+0+3+0+5+0+... = 1/12 +

0-2+0-4+0-6+... = 1/6 =

1-2+3-4+5-6+... = 1/12+1/6 = 3/12 = 1/4

Coerente.

Oppure

1-1+1-1+...=1/2

1+0+1+0+...=0 +

0-1+0-1+... = 1/2 =

1-1+1-1+... = 1/2

Coerente in tutti e due i membri.

In questo ultimo caso, possiamo indicare la somma tra le due serie come “somma a pettine” (“comb sum”), infatti le due serie si incastrano tra di loro: dove vi sono gli 0 nella prima serie, nella seconda vi sono i termini non 0, e dove vi sono i termini non 0 nella prima, vi sono i termini 0 nella seconda.

Indicheremo con somma a pettine anche una somma in verticale tra due serie dove la seconda è dilatata mentre la prima no.

7) Serie a pattern

Un tipo importante di serie è quello a pattern:

s: a+b+c+...+n+a+b+c+...+n+...

Ossia una serie dove vengono sommati in ordine dei termini, ripetutamente.

Nella descrizione di prima i termini vanno da a a n (termine generico).

Poiché vi sono vari sottotipi di queste serie illustriamo vari esempi, senza classificarli.

Ricordiamo che: una serie dilatata a partire da una serie x+x+x+... ha valore -x/2+x(d-p)/d

1-2+1-2+1-2+...= 1

Pattern: (1, -2)

a: 1+0+1+0+1+0+...=0 +

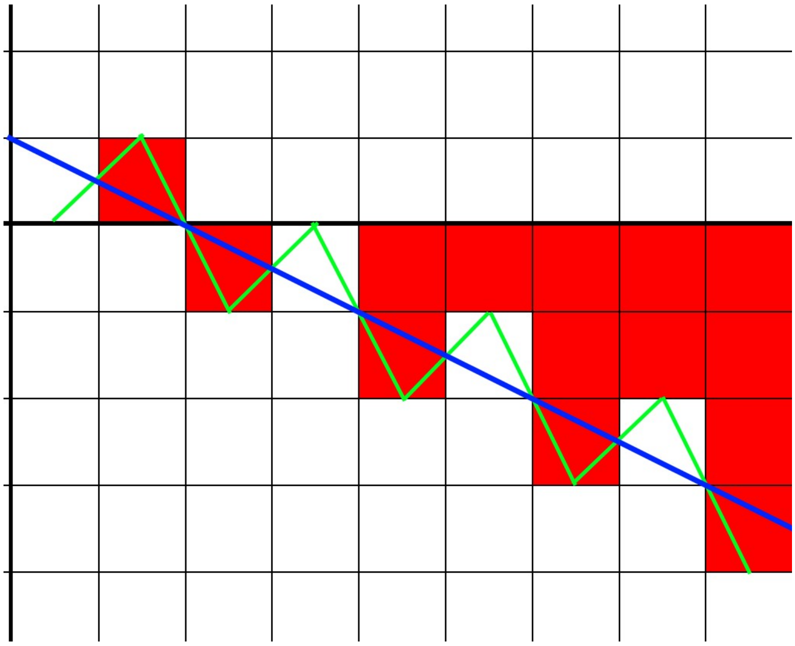
b: 0-2+0-2+0-2+...=1 =

---

c: 1-2+1-2+1-2+...=1 (c=a+b)

Questa serie è alternata ma non è stabile, ed è divergente, infatti nel grafico la retta di stabilità non è parallela all’asse x ed è decrescente.

Grafico:



Nel grafico a istogramma la retta blu interseca l’asse y all’ordinata 1.

Ricordiamo che il grafico a linee non è corretto per l’estrazione del valore, abbiamo infatti usato l’istogramma (più approfondimenti al capitolo 10).

Possiamo dunque generalizzare una serie a pattern con due elementi:

a+b+a+b+a+b+...=-b/2

a: a+0+a+0+...=0 +

b: 0+b+0+b+...=-b/2 =

---

c: a+b+a+b+...=-b/2 (c=a+b)

Una questione importante è: si può applicare la 2-compressione?

2-compressione:

1-2+1-2+1-2+...

```
U:        -1/2 -1/2 -1/2 -...       +
D:         1   -1/2 -1/2 -...       =
-----------------------------------------
(U+D):     1/2 -1    -1   -...
(U+D)/2:  1/4 -1/2  -1/2 -...
```

1/4 -1/2 -1/2 -... = -(-1/2)/2 + (1/4 -(-1/2)) = 1

Coerente.

Metodo ulteriore per la risoluzione

Usiamo la dilatazione 0x

```
a: 1+1+1+1+1+1+... =-1/2     +
b: 0-3+0-3+0-3+... = 3/2     =
-----------------------------------------
c: 1-2+1-2+1-2+... =2/2=1
```

Coerente.

(0-3+0-3+0-3+... è la 0x dilatata di -3-3-3-... dunque ha lo stesso suo valore che è 3/2)

Grazie alla formula per la dilatazione

è possibile trovare il valore anche per serie più “artistiche” come:

1+2+3+1+2+3+1+2+3+... = -5/3

1+0+0+1+0+0+1+0+0+... = 1/6	+
0+2+0+0+2+0+0+2+0+... = -1/3	+
0+0+3+0+0+3+0+0+3+... = -3/2	=
1+2+3+1+2+3+1+2+3+... = -5/3	

a+b+c+a+b+c+a+b+c+... = (a-b-3c)/6

a+0+0+a+0+0+a+0+0+...=+a/6	+
0+b+0+0+b+0+0+b+0+...=-b/6	+
0+0+c+0+0+c+0+0+c+...=-c/2	=
a+b+c+a+b+c+a+b+c+...=(a-b-3c)/6	

Possiamo estendere lo studio ad una generica serie con pattern $x_1+x_2+x_3+...+x_n$:

$x_1+x_2+x_3+...+x_n+x_1+x_2+x_3+...+x_n+...$

Come prima, per trovare il valore di questa serie, basta considerarla come somma di varie serie a termini costanti (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) ciascuna dilatata di n (dove n è il numero di elementi nel pattern) e con posizione del termine p corrispondente alla posizione del termine nel pattern (un numero da 1 a n dunque):

x_1 +0 +0 +... +0 +... +

0 +x_2 +0 +... +0 +... +

0 +0 +x_3 +... +0 +... +

... +

0 +0 +0 +... +x_n+... =

---

x_1 +x_2 +x_3 +... +x_n +...

Poiché ognuna di queste serie ha valore:

-x/2+x(d-p)/d

con d=n, x che varia da x_1 a x_n e p che varia da 1 a n (dove n è il numero di termini nel pattern)

Dunque sarà sufficiente eseguire la formula:

$x_1+x_2+x_3+...+x_n+x_1+x_2+x_3+...+x_n+...=s$

$$s=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{x_i}{2}+\frac{x_i(n-i)}{n}\right)$$

che può essere scritta come:

$x_1+x_2+x_3+...+x_n+x_1+x_2+x_3+...+x_n+...=s$

$$s=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i i$$

Oppure come:

$$s=\frac{x_1(n-2)+x_2(n-4)+x_3(n-6)+\cdots+x_n(n-2n)}{2n}$$

oppure come:

$$s=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i\,(n-2i)$$

Calcoliamo alcune serie usando questa formula:

1+1+1+1+... (N=1, pattern: 1)

s=(1/2)*(1)-(1/1)*(1*1)=-1/2 coerente

1-1+1-1+... (N=2, pattern 1-1)

s=(1/2)*(1-1)-(1/2)*(1*1-1*2)

s=0-(1/2)*(-1)=1/2 coerente

1+2+3+1+2+3+... (N=3, pattern: 1+2+3)

```
s=(1/2)*(1+2+3)-(1/3)(1*1+2*2+3*3)

s=6/2-14/3=(18-28)/6=-10/6=-5/3 coerente.
```

8) Zeta di Riemann

La Zeta di Riemann è una funzione molto famosa. Su Internet si possono trovare moltissime informazioni su di essa.

È collegata alle serie infinite.

ATTENZIONE! Parleremo di questa funzione in modo non rigoroso, e da un punto di vista matematico non sempre corretto (sarà infatti varie volte euristico).

Indicheremo la funzione Zeta di Riemann con la lettera Z.

La Zeta di Riemann è definita come:

$$Z(t) = \frac{1}{1^t} + \frac{1}{2^t} + \frac{1}{3^t} + \frac{1}{4^t} + \cdots$$

con t numero complesso.

Qui considereremo solo i casi con t reale.

Inoltre poniamo t=-x in modo da poter usare una funzione rinconducibile alla Zeta di Riemann ma più semplice da vedere.

$$S(x) = 1^x + 2^x + 3^x + 4^x + \cdots$$

Dunque S(x)=Z(-t)

Consideriamo ora S(x).

S(0) = 1+1+1+1+... = -1/2

S(1) = 1+2+3+4+5+...= -1/12

S(2) = 1+4+9+16+25+... = 0

Abbiamo già visto queste tre serie nei capitoli precedenti.

S(-1)= 1+1/2+1/3+1/4+... diverge comunque e non ha valore associato

E molti altri valori sono stati già trovati.

Ora analizziamo in particolare la situazione per x>=0

S(0) = 1+1+1+1+... può essere facilmente risolta tramite il procedimento di "somma a pettine" (già visto in precedenza):

+1+1+1+1+...= y   +

-0-2-0-2+...= -2y   =   (-2-2-2-... 0x dil.)

+1-1+1-1+...= -y

Ma 1-1+1-1+...=1/2 dunque:

1+1+1+...=-1/2

Abbiamo dunque eseguito: y-2y.

In modo analogo per 1+2+3+4+...=-1/12

"Dimostrazione" di Ramanujan (già vista in precedenza)

+1+2+3+4+5+6+... =y   +

-0-4-0-8-0-12-...=-4y   =   (-4-8-12-... 0x dil)

+1-2+3-4+...=-3y

1/4=-3y

y=-1/12

Abbiamo dunque eseguito y-4y.

1+4+9+16+25+36+...=y +

0-8+0-32+0+-72+...=-8y = (-8-32-72-... dil.)

1-4+9-16+25-...=-7y

0=-7y

y=0

Abbiamo dunque eseguito y-7y

In generale possiamo notare che data S(x) (dove x è l'esponente) la sottrazione S(x)-(2^{x+1})S(x) (con (2^{x+1})S(x) 0x dilatata) porta alla versione alternata di S(x).

1+1+1+1+... → y-2y=-y → 1-1+1-1+... (x=0 → 2^{0+1}=2)

1+2+3+4+... → y-4y=-3y → 1-2+3-4+... (x=1 → 2^{1+1}=4)

1+4+9+16+... → y-4y=-7y → 1-4+9-16+... (x=2 → 2^{2+1}=8)

In generale si nota dunque che per transitare dalla serie S(x) alla sua alternata (che indichiamo con T(x)) è sufficiente eseguire una sottrazione in colonna tra S(x) e la 0x dilatata di ($2^{(x+1)}$)S(x):

$$S(x) \to S(x) - 2^{x+1}S(x) \to T(x)$$

dove $S(x) = 1^x + 2^x + 3^x + 4^x + \cdots$

e $T(x) = 1^x - 2^x + 3^x - 4^x + \cdots$

Il problema di trovare il valore della serie S(x) è rimandato a trovare il valore di T(x).

Ma come trovare il valore di T(x)?

Il problema è stato affrontato nella sezione della somma a slittamento dove abbiamo visto che nel caso di serie stabili è sufficiente applicare somme a slittamento sin che si ha un risultato finito.

Al momento non mi è noto se le alternate delle Zeta di Riemann siano sempre stabili, ma suppongo di sì.

Esempio:

1-4+9-16+25-36+...	+
0+1-4+9 -16+25-...	=
1-3+5-7 +9 -11+...	+
0+1-3+5 -7 +9 -...	=
1-2+2-2 +2 -2 +...	+
0+1-2+2 -2 +2 -...	=
1-1+0+0 +0 +0 +...	=

0

La somma a slittamento è stata applicata 3 volte.

Le varie somme possono essere anche così rappresentate per questo esempio:

1 -4 +9 -16+25 -36 +... = s

0 +1 -4 +9 -16 +25 -... = s

0 +1 -4 +9 -16 +25 -... = s

0 +0 +1 -4 +9 -16 +... = s

0 +1 -4 +9 -16 +25 -... = s

0 +0 +1 -4 +9 -16 +... = s

0 +0 +1 -4 +9 -16 +... = s

0 +0 +0 +1 -4 +9 +... = s

---

1 -1 +0 +0 +0 +0 +... = 8s

E possiamo riarrangiare il tutto ancora così (ossia a seconda di quanti 0 ci sono all’inizio della serie):

1 -4 +9 -16+25 -36 +... = s

0 +1 -4 +9 -16 +25 -... = s

0 +1 -4 +9 -16 +25 -... = s

0 +1 -4 +9 -16 +25 -... = s

0 +0 +1 -4 +9 -16 +... = s

0 +0 +1 -4 +9 -16 +... = s

0 +0 +1 -4 +9 -16 +... = s

0 +0 +0 +1 -4 +9 +... = s

---

1 -1 +0 +0 +0 +0 +...

Possiamo poi unire il tutto tramite dei coefficienti per ogni tipo di serie slittata:

```
1 x (1 -4 +9 -16  +25 -36 +...)

3 x (0 +1 -4 +9   -16 +25 -...)

3 x (0 +0 +1 -4   +9  -16 +...)

1 x (0 +0 +0 +1   -4  +9  +...)
--------------------------------
     1 -1 +0 +0   +0  +0  +...
```

Analizzando gli analoghi processi per le serie:

1-1+1-1+...

1-2+3-4+...

si nota che:

la sommatoria finita di tutte le serie alternate slittate è uguale a (2^{x+1})t, dove x è l'esponente dei termini 1 2 3 4 ... in $S(x)=1^x+2^x+3^x+...$ e $T(x)=1^x-2^x+3^x-4^x+...$ e ti è il valore associato a T(x).

Il numero di somme a slittamento necessari è: x+1.

Il numero di tipi di serie slittate da sommare è x+2.

I coefficienti corrispondono al coefficiente binomiale di (x+1) su i, con i che va da 0 a x+1.

Inoltre è quasi sicuro basti sommare sino alla x+2 esima colonna per ottenere il risultato (ecco il motivo della tabulazione nella tabella delle serie precedente).

Il risultato poi dovrà essere diviso per 2^{x+1} per ottenere t, che il valore dell'alternata T(x). Successivamente si dovrà soddisfare l'equazione di prima (normale→alternata) che è:

$s-2^{x+1}s=t$ dunque

$(1-2^{x+1})s=t$

inserendo t, per ottenere il valore della serie S(x) s.

Riscriviamo gli esempi di prima, in un'ottica nuova:

1+1+1+... = s → 1-1+1-1+...=z (esp: x=0)

z=s-2s=-s

1 x	(1	-1	+1	-1	+1	-...)
1 x	(0	+1	-1	+1	-1	+...)
	1	+0	+0	+0	+0	+... = 1

$2^{0+1}t=1$ → t=1/2 → s=-1/2

1+2+3+4+...=s → 1-2+3-4+...=z (esp: x=1)

z=s-4s=-3s

1 x	(1	-2	+3	-4	+5	-...)
2 x	(0	+1	-2	+3	-4	+...)
1 x	(0	+0	+1	-2	+3	-...)
	1	+0	+0	+0	+0	+...

$1=2^{1+1}t$ → t=1/4 → s=-1/12

Evitiamo di scrivere la formula riassuntiva in quanto sarebbe abbastanza complicata e poco chiara, seppur potrebbe essere che da uno studio di essa possano emergere proprietà interessanti.

9) Funzioni associate

Successivamente degli accenni alle funzioni associate alle serie infinite che abbiamo visto in precedenza.

È un argomento di cui ho sentito la necessità di scriverne solo recentemente, ma se dovessi approfondirlo il libro diventerebbe il doppio più lungo e verrebbe pubblicato fra mesi. Dunque vi saranno solo degli accenni.

Alle serie in precedenza viste si possono associare delle funzioni, che sono le “linee riassuntive dei grafici” che abbiamo visto all’inizio del libro.

Queste funzioni permettono di affrontare facilmente casi più complicati e di “generalizzare” alcuni concetti. Al capitolo 11 vedremo alcune idee del “senso” di questi metodi.

Non mi è chiaro comunque del tutto come gestire le funzioni associate.

<u>Inoltre non so se i metodi poi descritti coincidano sempre con i risultati trovati euristicamente di prima, ho infatti analizzato in modo sommario questo approccio, e potenzialmente potrei aver trattato solo casi favorevoli.</u>

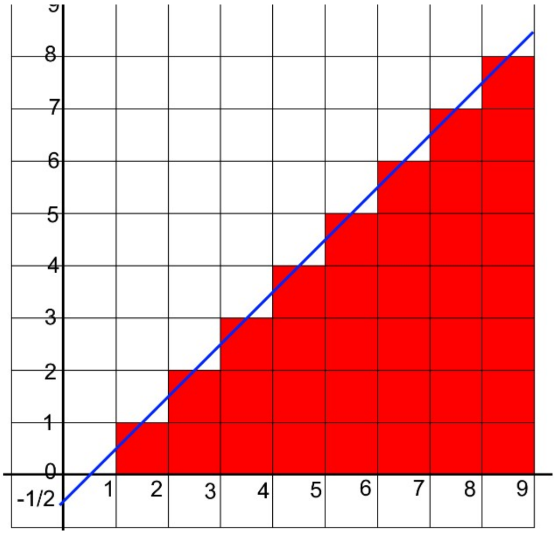
Di sicuro vi sono già stati altri studi a riguardo di altri.

Per semplicità divideremo direttamente il capitolo in vari paragrafi dedicati a esempi.

9a) 1+1+1+... e a+a+a+...

Per la serie 1+1+1+... è facile notare come la linea che taglia l'istogramma sia la retta:

$$1+1+1+\cdots=-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y=x-\frac{1}{2}$$



Per x=0 y risulta -1/2.

Possiamo generalizzare la funzione per:

$$a+a+a+\cdots=-\frac{a}{2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{y}=\mathrm{ax}-\frac{\mathrm{a}}{2}$$

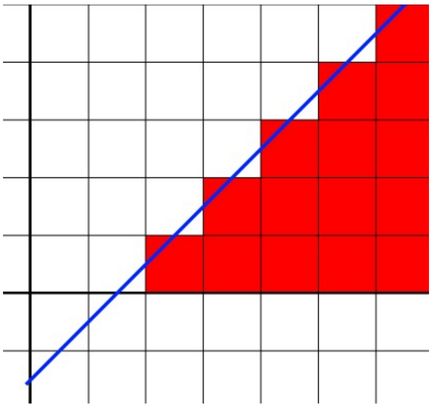
Slittamento

Possiamo attuare lo slittamento della serie come traslazione della funzione.

Per la serie 0+1+1+1+...=-3/2 (slittamento 1) la funzione associata è:

$$y = x - 1 - \frac{1}{2} = x - \frac{3}{2}$$

$$0 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y = x - \frac{3}{2}$$



che per x=0 ha y=-3/2 come già visto anche in precedenza.

E possiamo generalizzare lo slittamento:

La funzione associata allo slittamento della serie 1+1+1+...→ 0+...+0+1+1+1+... con n zeri all'inizio della serie è:

$$y = x - n - \frac{1}{2}$$

$$0 + 0 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad y = x - \frac{5}{2}$$

Aggiunta

La traslazione della funzione può essere usata anche per l'aggiunta alla serie, ossia la somma in colonna con altri termini (già affrontata euristicamente al capitolo 5).

Esempio:

1+1+1+1+1+... = -1/2

1+0+0+0+0+... = 1

2+1+1+1+1+... = 1/2

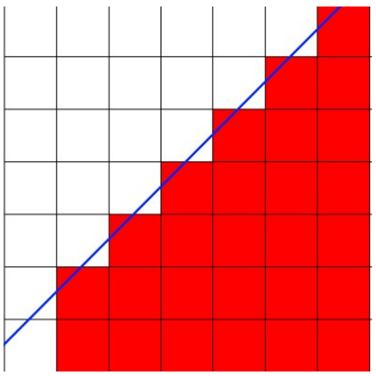
La traslazione deve essere effettuata in verticale dunque la formula diventa per

$$a+1+1+1+\cdots=-\frac{1}{2}+(a-1) \quad \rightarrow \quad \mathrm{y}=\mathrm{x}-\frac{1}{2}+(a-1)$$

Per 2+1+1+1+...:

$$2+1+1+1+\cdots=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{y}=x+\frac{1}{2}$$

il grafico istogramma con funzione associata risulta:



La retta y=x+1/2 interseca l’asse y a 1/2.

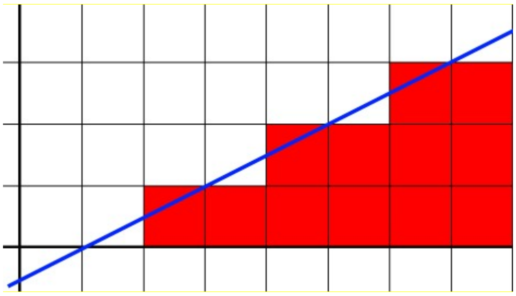
Dilatazione

Anche la 2-dilatazione di una serie (es.: 1+1+1+... → 0+1+0+1+...) può essere attuata nella funzione associata dilatandola di un fattore 2.

2-dilatazione 0x:

$$0+1+0+1+0+1+\cdots \quad \rightarrow \quad y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$$

x è stata divisa per 2

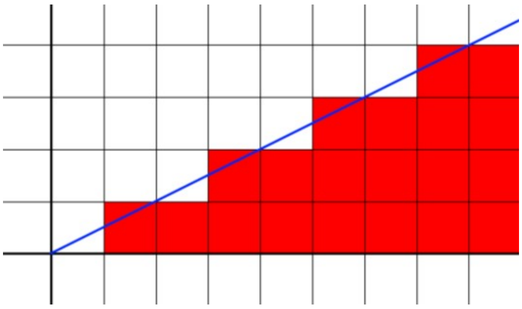


Sopra la visualizzazione della retta y=x/2-1/2 che interseca l'asse y all'ordinata -1/2.

Se vogliamo invece avere la funzione associata alla serie 1+0+1+0+... ossia la x0 dilatata di 1+1+1+... sarà sufficiente traslare la funzione della dilatata 0x a sinistra di 1:

$$1+0+1+0+1+0+\cdots \quad \rightarrow \quad y=\frac{x+1}{2}-\frac{1}{2}$$

che infatti risulta essere 0 per x=0.



Visualizzazione della funzione associata a 1+0+1+0+...

Possiamo generalizzare la funzione della serie 1+1+1+... dilatata 0....x con un fattore di dilatazione d:

$$0+0+\cdots+1+0+0+\cdots+1+\cdots \quad \rightarrow \quad y=\frac{x}{d}-\frac{1}{2}$$

La 0...x dilatazione (x all'ultima posizione) nelle serie corrisponde alla dilatazione nelle funzioni associate, mentre le dilatazioni non 0...x delle serie corrispondono alle traslazioni delle funzioni associate alla 0...x dilatata.

e dunque incorporando tutte le possibili dilatazioni per la serie 1+1+1+1+... la formula diventa:

$$y=\frac{x}{d}+\frac{d-p}{d}-\frac{1}{2}$$

dove p indica la posizione del termine e d il fattore di dilatazione

Da notare che la formula presentata al capitolo 6: ($y = -\frac{1}{2} + \frac{d-p}{d}$) è $y = \frac{x}{d} + \frac{d-p}{d} - \frac{1}{2}$ per x=0, ossia l'intersezione con l'asse y.

E per una serie a+a+a+a+... dilatata di d, con a in posizione p si ha la formula:

$$y = \frac{ax}{d} + \frac{a(d-p)}{d} - \frac{a}{2}$$

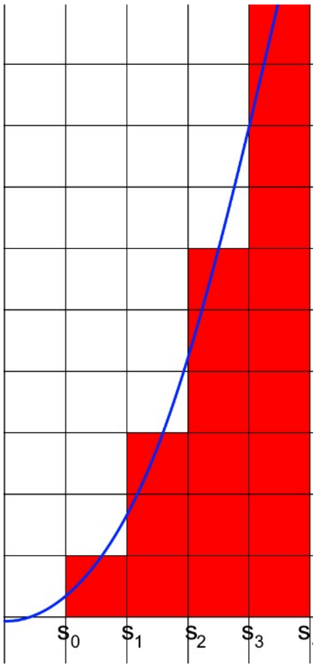
Anche questa è già stata riportata per x=0 nel capitolo 6.

Combinando tutti questi metodi si possono ottenere una vasta gamma di risultati.

Per esempio si potrebbe combinare una 2-dilatazione con un 1-slittamento e poi con un'ulteriore dilatazione.

9b) 1+2+3+4+...

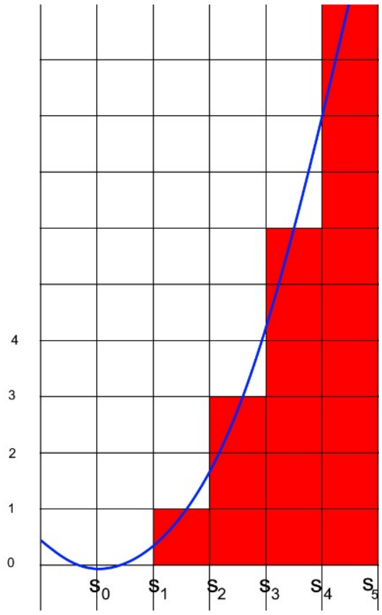
Ma qual è la funzione della curva per il grafico di 1+2+3+4+...=-1/12?



Ricordiamo che il grafico non è preciso in quanto è stato fatto con un semplice software da disegno.

Slittamento

Per la serie 0+1+2+3+4+...=5/12 abbiamo però visto un grafico simile



Il grafico qui sopra non è preciso perché è stato fatto con un semplice software di disegno.

il 5/12, ricavato numericamente, si può visualizzare nella curva nell'istogramma delle somme parziali, come intersezione della curva blu con l'asse y.

Abbiamo visto che la curva blu è probabilità una parabola (o parte di essa).

In quanto parabola, è simmetrica rispetto l'asse verticale tracciata in corrispondenza di s_0; dunque il valore 5/12 è ottenuto anche come ordinata nell'intersezione della curva blu con l'asse verticale in corrispondenza di s_1

Dunque abbiamo 3 condizioni che metteremo a sistema con l'equazione generica della parabola.

Supponiamo che l'asse y sia situata in corrispondenza di s_0:

$$\begin{cases} p: y = ax^2 + bx + c \\ P_1\left(-1, \frac{5}{12}\right) \in p \\ P_2\left(0, -\frac{1}{12}\right) \in p \\ P_3\left(1, \frac{5}{12}\right) \in p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{5}{12} = a(-1)^2 + b(-1) + c \\ -\frac{1}{12} = a0^2 + b0 + c \\ \frac{5}{12} = a1^2 + b1 + c \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{12} \end{cases} \rightarrow y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}$$

La funzione associata a 1+2+3+4+... è:

$$p: y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}$$

Se slittiamo a destra la funzione di 1, l'intersezione della funzione con l'asse y è 5/12 (è la funzione p traslata a destra di 1):

La funzione associata a 0+1+2+3+4+... è:

$$y = \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{1}{12} = \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{12}$$

Allo stesso modo, traslando la funzione di 2 a destra, l'intersezione con l'asse y risulta 23/12, che è il valore associato alla serie 2-slittata:
0+0+1+2+3+4+... = 23/12

La funzione associata a 0+0+1+2+3+4+... è:

$$y = \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{1}{12} = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{23}{12}$$

è la funzione p traslata a destra di 2

Aggiunta

Se slittiamo il grafico di 1 in giù, otteniamo che l'intersezione è a -13/12 che è infatti il risultato della serie:
0+2+3+4+5+... = -13/12

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12} - 1$$

questa è la funzione p traslata in giù di 1

Se trasliamo il grafico di 1 in giù e di 1 a sinistra, otteniamo il grafico di 2+3+4+5+... che da come intersezione della curva sull'asse y ordinata -7/12:

2+3+4+5+...=-7/12

infatti, la funzione di p traslata è:

$$y = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{1}{12} - 1$$

Dilatazione

Si può inoltre attuare la 2-dilatazione 0x: è sufficiente dilatare la funzione associata per il fattore 2:

La funzione associata alla 2-dilatazione 0x risulta:

$$0+1+0+2+0+3+0+4+\cdots \rightarrow \mathrm{y}=\frac{\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)^2}{2}-\frac{1}{12}=\frac{x^2}{8}-\frac{1}{12}$$

Risulta quindi evidente che l’intersezione della funzione con l’asse y non varia.

E se vogliamo trovare la funzione associata a 1+0+2+0+3+0+... sarà sufficiente traslare a sinistra di 1 la funzione:

$$1+0+2+0+3+0+\cdots \rightarrow \mathrm{y}=\frac{(\mathrm{x}+1)^2}{8}-\frac{1}{12}=\frac{x^2}{8}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{24}$$

che infatti per x=0 risulta essere:

$$y=\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=\frac{1}{24}$$

Si conferma dunque 1+0+2+0+3+0+4+0+...=1/24

Possiamo generalizzare la dilatazione della funzione associata a 1+2+3+4+... per un fattore d:

$$y=\frac{\left(\frac{x}{d}\right)^2}{2}-\frac{1}{12}=\frac{x^2}{2d^2}-\frac{1}{12}$$

Che per d=3 diventa:

$$0+0+1+0+0+2+0+0+3+\cdots \rightarrow \mathrm{y}=\frac{\mathrm{x}^2}{18}-\frac{1}{12}$$

Che ovviamente per x=0 risulta sempre -1/12 (infatti 0+0+1+0+0+2+0+0+3+...=-1/12).

Possiamo dunque trovare le funzioni associate per le dilatate 0+1+0+0+2+0+0+3+0+... e 1+0+0+2+0+0+3+0+0+... traslando la funzione rispettivamente di 1 e 2 a sinistra:

$$0+1+0+0+2+0+0+3+0+\cdots \rightarrow y=\frac{(x+1)^2}{18}-\frac{1}{12}$$

che ha per x=0

$$y=\frac{1}{18}-\frac{1}{12}=-\frac{1}{36}$$

dunque

$$0+1+0+0+2+0+0+3+0+\cdots=-\frac{1}{36}$$

$$1+0+0+2+0+0+3+0+0+\cdots \rightarrow y=\frac{(x+2)^2}{18}-\frac{1}{12}$$

che ha per x=0

$$y=\frac{4}{18}-\frac{1}{12}=\frac{5}{36}$$

dunque

$$1+0+0+2+0+0+3+0+0+\cdots=\frac{5}{36}$$

Combinando tutti questi metodi si possono ottenere una vasta gamma di risultati.

Per esempio si potrebbe combinare una 2-dilatazione con un 1-slittamento e poi un’ulteriore dilatazione.

9c) 2+4+8+16+... e serie geometriche

Una questione aperta è: perché le serie geometriche slittate non cambiano valore?

Infatti abbiamo visto per esempio che:

2+4+8+16+32+...=-2

0+2+4+8+16+... =-2

0+0+2+4+8+16+...=-2

Mentre di solito lo slittamento per le serie divergenti ne cambia il risultato.

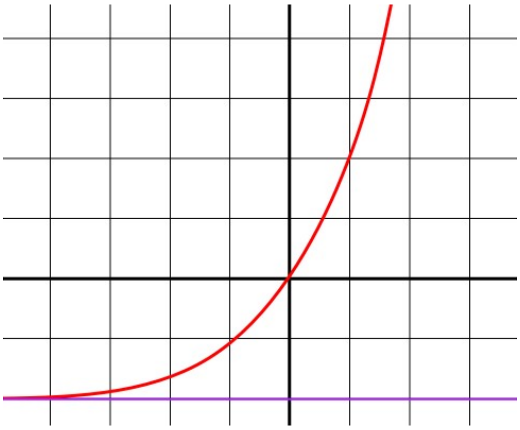
La funzione delle somme parziali della serie geometrica è:

$$y = \frac{a - a^{t+1}}{1 - a}$$

Che per 2 diventa:

$$y = 2^{t+1} - 2$$

il cui grafico qualitativo è:



Vi è un asintoto orizzontale su y=-2

Dunque una traslazione a destra della funzione sposterebbe l’intersezione della funzione con l’asse y verso l’ordinata -2.

Dunque se pensiamo che la funzione sia simile a questa, allora possiamo comprendere come mai la serie 2+4+8+16+... slittata sia sempre -2.

E in modo analogo le serie geometriche slittate danno sempre risultato x/(1-x).

O forse nella funzione associata il dominio è definito solo per x≥0 dunque -2 sarebbe il limite inferiore.

Oppure la funzione varia a seconda dello slittamento e la situazione è più strana di quelle prime analizzate.

9d) 1+3+5+7+9+...

La funzione delle somme parziali è:

$y = x^2$ che è una parabola

Sappiamo che 1+3+5+7+...=1/3

Calcoliamo 0+1+3+5+7+...:

```
+1+3+5+7+9+... = 1/3    +
-2-2-2-2-2-... = 1      +
+1+0+0+0+0+... = 1      =
------------------------------
 0+1+3+5+7+... = 7/3
```

Dunque seguiamo una procedura analoga a quella attuata per il caso precedente: mettiamo a sistema l'equazione di una generica parabola, e il suo passaggio per i punti (-1,7/3), (0,1/3), (1,7/3):

$$\begin{cases} p: y = ax^2 + bx + c \\ \left(-1, \frac{7}{3}\right) \in p \\ \left(0, \frac{1}{3}\right) \in p \\ \left(1, \frac{7}{3}\right) \in p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots \quad \rightarrow \quad y = 2x^2 + \frac{1}{3}$$

9e) 1+4+9+16+...

In modo analogo suppongo si possa trovare la funzione associata a 1+4+9+16+...

La formula delle sue somme parziali è:

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

Che non è simmetrica rispetto l'asse y!

Bisognerà dunque mettere a sistema un'equazione di terzo grado con 3 punti trovati da 3 slittamenti (è appunto di 3 grado e necessita di 3 punti per trovare la curva), inoltre poiché non è simmetrica rispetto l'asse y non si può specchiare un punto nel suo simmetrico.

9f) Serie alternate

Per le serie alternate vedi il metodo descritto al capitolo 10.

9g) Tabella riassuntiva

Di seguito una tabella riassuntiva delle funzioni associate alle serie più famose (incluse alcune alternate)

Serie	Funzione dei termini	Funzione delle somme parziali	Funzione associata	Valore associato
$1+1+1+1+\cdots$	$y=1$	$y=x$	$y=x-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$a+a+a+a+\cdots$	$y=a$	$y=ax$	$y=ax-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$
$0+1+1+1+\cdots$	$*_1$	$*_2$	$y=x-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$1+2+3+4+\cdots$	$y=x$	$y=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$	$y=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$

$0+1+2+3+\cdots$	$y=x$	$y=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}$	$y=\frac{x^2}{2}-x+\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$
$2+4+8+16+\cdots$	$y=2^x$	$y=2^{x+1}-2$	?	-2
$1+3+5+7+\cdots$	$y=2x-1$	$y=x^2$	$y=2x^2+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$0+1+0+1+\cdots$	$*_4$	$*_4$	$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$1+0+1+0+\cdots$	$*_4$	$*_4$	$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$	0
$0+1+0+2+$ $+0+3+0+4+\cdots$	$*_4$	$*_4$	$\frac{x^2}{8}-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$
$1-1+1-1+\cdots$	$y=1$ $*ALT.$	$*_3$	$y=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$1-2+3-4+\cdots$	$y=x$ $*\ ALT.$	$*_3$	$y=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$*_1$ La funzione è a tratti, parte come y=0, poi a x=1 diventa y=1 (potenziale caso particolare)

$*_2$ La funzione è a tratti, parte come y=0, poi a x=1 diventa y=x (potenziale caso particolare)

$*_3$ La funzione è a punti o a tratti, poiché la serie è alternata, per approfondimenti vedere i paragrafi dove è stata trattata nel dettaglio.

*ALT. La funzione è quella riportata ma in versione alternata ossia se è riportata la funzione

$*_4$ Per brevità omettiamo l'analisi della funzione dei termini, che è a tratti ma riconducibile ad una continua.

Da ricordare che x è numero naturale, e che partiamo con l'indice a 1 (indice 1: primo termine, di solito è invece convenzione con 0 indicare il primo termine)

<u>Al momento della scrittura di questo testo non mi è disponibile la funzione associata alle serie a pattern, ma sono di grande importanza! Alla pagina "errorilibro" (il cui link è all'inizio e alla fine del libro riportato) sarà scritta se disponibile.</u>

<u>La combinazione dei metodi descritti prima può fornire una vasta gamma di metodi di risoluzione di molte serie.</u>

10) Grafici, rilevazione stabilità ed estrazione valori

10a) Grafico a linee vs grafico istogramma

Nel libro sono mostrati grafici a linee e grafici istogramma, relativi alle somme parziali di serie infinite.

Prima di approfondire la procedura per la verifica della stabilità di una serie e l'estrazione del suo valore a partire dal grafico, osserviamo che il grafico a linee non è un buono strumento per l'analisi di una serie, mentre lo è l'istogramma.

Infatti il grafico a linee spesso illustra risultati non coerenti con i calcoli numerici, mentre l'istogramma mostra risultati spesso coerenti con i valori trovati numericamente.

Qui una tabella riassuntiva di alcuni casi:

	Linee	Istogr.	Numeric.
1-1+1-1+...	1/2	1/2	1/2
1-2+3-4+...	1/4	1/4	1/4
1+1+1+1+...	0	-1/2	-1/2
1+2+3+4+...	?	-1/12	-1/12
1-2+1-2+...	0	1	1

Il grafico istogramma rappresenta in modo corretto i risultati, quello a linee non sempre.

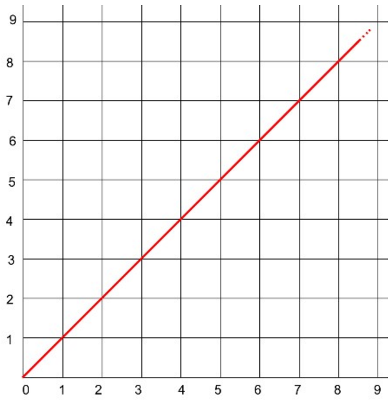
Il grafico a linee è spesso più facile da rappresentare a da analizzare.

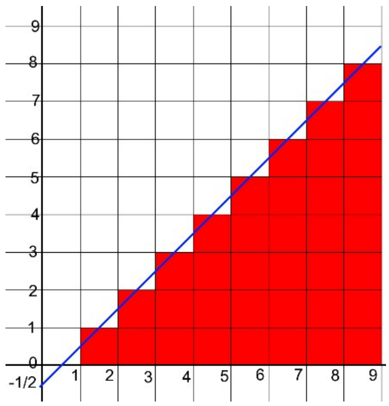
Nelle serie stabili il grafico a linee porta agli stessi risultati dell’istogramma.

Un problema importante del grafico a linee è che la transizione da una somma parziale ad un'altra avviene in modo continuo, cosa che invece non dovrebbe succedere in quanto una somma è immediata.

Vediamo per esempio il caso di 1+1+1+1+...

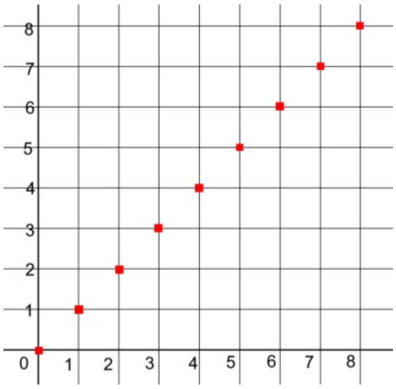
E compariamo il grafico a linee e istogramma:





Ad ogni somma di ciascun termine, l’1 viene aggiunto istantaneamente, ma solo nel grafico istogramma l’istantaneità della somma è visualizzata.

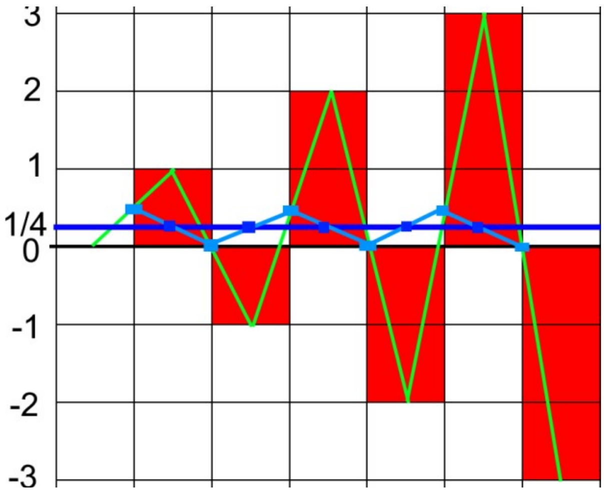
Si può però trovare un altro tipo di grafico, molto interessante:



In questo caso si limita la funzione delle somme parziali ai soli numeri naturali, e il grafico a linee risulta una congiunzione dei punti di quest’ultimo grafico a punti.

10b) Verifica stabilità ed estrazione valori

Abbiamo già visto nei capitoli precedenti il grafico istogramma per 1-2+3-4+5-6+... che è:



Si nota che da un grafico a istogramma di una serie si può trovare se la serie è stabile attraverso il seguente algoritmo:

1) Segnare i punti medi delle pareti orizzontali di ogni colonna

(Nell'immagine di prima sono i vertici della linea spezzata verde)

2) Tracciare la linea spezzata che congiunge i punti medi.

(Nell'immagine di prima è la linea spezzata verde)

3) Segnare i punti medi dei (nuovi) segmenti.

(Nell'immagine di prima sono i marcatori azzurri)

4) Andare al punto 2

Si continua sinché i punti si depositano su una retta.

Se essa è parallela all'asse x allora la serie è stabile.

Altrimenti non lo è.

L'intersezione della retta (indipendentemente dal fatto che sia parallela all'asse x) con l'asse y dà come ordinata il valore associato alla serie.

Nel caso non si formi una retta dopo un numero di iterazioni, allora questo algoritmo non è adatto ad estrarre il valore.

Dunque l’algoritmo descritto può servire a verificare la stabilità di ogni serie, ma permette di estrarre il valore solo se si forma una retta (dunque non per serie divergenti a termini non costanti)

Al momento non è noto un metodo per le serie divergenti a termini non costanti.

Da notare come la prima linea spezzata verde coincida con il grafico a linee della stessa serie, slittato a destra di 1/2.

Dunque volendo si può attuare l’algoritmo sia a partire dall’istogramma partendo dal punto 1 dell’algoritmo, sia a partire dal grafico a linee slittato a destra di 1/2 e partendo dal punto 3.

L’algoritmo è gestibile anche soltanto numericamente ma la descrizione dettagliata è omessa per brevità.

Accenno solo al fatto che compare indirettamente il coefficiente binomiale.

È possibile però che si possa arrivare ad una formula molto utile a partire da esso (considerando i punti nel piano cartesiano e le loro coordinate).

I grafici a linee sono molto più comodi per verificare la stabilità di una serie, ma non per estrarne il valore

Il procedimento per l’estrazione del valore delle serie dove questo algoritmo non funziona è descritto al capitolo 9.

11) Modello e proprietà

Nuove proprietà possono essere colte nelle serie infinite.

11a) Proprietà commutativa

La proprietà commutativa può essere applicata nelle serie non convergenti senza cambiare il valore di una serie, solo se non è applicata a un'infinita quantità di termini.

Esempio:

+1-1+1-1+1-1+... = 1/2

Scambiamo il primo termine con il secondo:

-1+1+1-1+1-1+... = -1+1+1/2 (stabilità)

-1+1+1/2 = 1/2

Coerente.

Se però si commutano tutti i +1 con i -1 adiacenti (quantità infinita di termini) la serie cambia valore:

-1+1-1+1-1+1-...=-1/2

Esempio:

1+2+1+2+1+2+...=-1

e anche 2+1+1+2+1+2+... = -1

mentre invece commutando ogni termine di posizione dispari con il suo successivo si ha:

2+1+2+1+2+1+... = -1/2

Nelle serie convergenti la commutazione di un’infinita quantità di termini non comporta il cambiamento del valore associato alla serie.

11b) Proprietà associativa e raccoglimenti

La proprietà associativa non può essere applicata alle serie non convergenti o non stabili o non geometriche altrimenti il valore della serie cambia.

Avevamo infatti già notato il problema affrontando la questione delle parentesi.

Es.: (divergente)

1+1+1+1+1+...= -1/2

mentre

(1+1)+1+1+... → 2+1+1+1+... = 1/2

È invece possibile applicare la proprietà associativa per le alternate stabili:

Alla luce della considerazione che l’approccio verticale è corretto (mentre quello orizzontale generalmente no) per la somma di serie, arriva dunque la necessità di stabilire una convenzione per le parentesi.

Cioè, se scrivo: 1+(1+1+1+...) nelle parentesi è contenuta la serie 1+1+1+... oppure la stessa meno 1 (ossia 0+1+1+1+...)?

Decidiamo questa convenzione:

se si scrive 1+(1+1+1+...) intendiamo: 1 più la serie 1+1+1+1+... dunque la serie 1+1+1+... è "integra", anche se vi è un altro 1 fuori dalle parentesi.

Se invece vogliamo sottolineare la mancanza di un 1, dovremmo scrivere: 0+1+1+1+... ossia sottrarre al primo termine un 1.

Dunque il raccoglimento nell'esempio:

1+1+1+1+.... = 1+(1+1+1+1+...) NON È CORRETTO!

in quanto nelle parentesi si dovrebbe aver scritto (0+1+1+1+...), meglio se in scrittura verticale:

```
1+1+1+1+... = 1+0+0+0+...    +

              0+1+1+1+...    =
---------------------------------
1+1+1+1+... = 1+1+1+1+...
```

Poiché applicando la somma di termini tra parentesi si attua la proprietà associativa, i raccoglimenti sono permessi, nelle serie non stabili o non convergenti, solo se non parziali (ossia sono permessi solo se si raccoglie qualcosa da tutta la serie, altrimenti si starebbe applicando ancora la proprietà associativa)

Le serie stabili accettano la proprietà associativa e raccoglimenti parziali.

Eccezione!

Le serie geometriche accettano la proprietà associativa e i raccoglimenti parziali

Suppongo che poiché le serie geometriche supportano la proprietà associativa, così come le alternati stabili, tra questi due tipi di serie vi sia una connessione più forte.

La proprietà associativa è un aspetto dell'approccio orizzontale.

11c) "Futilità"

In alcuni casi parte di una serie sembra "non avere alcun effetto nel risultato":

500+1+500+1+500+1+...=-1/2

I termini 500 non hanno alcun effetto in quanto se scomponiamo la serie in:

500+0+500+0+500+0+...=0 +

0+1+ 0+1+ 0+1+...=-1/2 =

500+1+500+1+500+1+...=-1/2

I termini 500 non hanno alcun effetto. Ricordiamoci che ciò accade solo in caso di serie a termini costanti x0 dilatate.

11d) La questione dell'=

Il problema dell'= nasce quando una serie non è convergente e viene associata ad un valore: per una serie convergente come 1/2+1/4+1/8+..., infatti, è ok porre = 1, in quanto effettivamente la successione delle somme parziali tende ad 1; mentre matematicamente non è corretto affermare che 1-1+1-1+...=1/2 oppure che 1+2+3+4+...=-1/12 infatti queste due serie non convergono! la successione delle loro somme parziali non tende a quei due valori.

Dunque possiamo affrontare il primo punto di vista risolutivo: i valori associati alle serie non convergenti, sono un "riflesso" di ciò che accade nella funzione associata al grafico delle somme parziali (la linea "riassuntiva") che intersecandosi con l'asse y dà come ordinata proprio quel valore.

Le abbiamo viste al capitolo 9 e 10, e varie volte nel libro.

A mio parere, comunque, ciò non toglie del tutto il problema, ossia: perché allora vi è questa associazione? Cioè: perché, e in che modo, avviene che usando metodi euristici si ottenga il valore che scaturisce dall'intersezione delle funzioni associate con l'asse y?

Vi è forse un legame particolare tra i casi di serie non convergenti, e dunque con l'uso di infiniti, e l'intersezione della funzione associato con l'asse y?

Ecco dunque che mi sembra lecito pensare ad una motivazione alternativa.

Come già affermato da altri studiosi, si potrebbe estendere il concetto di somma, ad altro.

In particolare notiamo, alla luce delle osservazioni prima fatte (raccoglimenti, grafici istogramma, funzioni associate ecc.) che i termini e le somme di essi nelle serie non convergenti non hanno solo importanza quantitativa: gioca infatti un ruolo fondamentale la disposizione dei termini in una serie.

Pensando alla serie 1-1+1-1+... (e all’aneddoto della lampadina) possiamo notare come i termini e le somme siano associati ad una temporalità.

Si potrebbe ipotizzare che la somma, in un contesto “infinito” perda il suo ruolo atemporale, o forse la somma che si sta usando nelle serie infinite non convergenti non sia una somma “classica”, ma qualcos’altro: si potrebbe affermare una somma “temporale”, e si può addirittura ricollegarsi al concetto di funzioni associate, con un ulteriore rafforzamento della questione su come mai vi è questa associazione tra somme non convergenti e l’intersezione delle funzioni associate con l’asse y.

Potremmo addirittura individuare una sorta di “cambio dimensionale”: mentre di solito una somma normale “agisce” per quantità, banalmente rappresentabile sull’asse x, all’introduzione di infiniti, scatta l’utilizzo dell’asse y (nuova dimensione) per il risultato.

Ciò sarebbe tranquillamente associabile all’osservazione fatta riguardo l’approccio orizzontale (asse x) tipico dei normali conti e l’approccio verticale (asse y) tipico di molte serie infinite.

Infatti se notiamo un’equazione con le serie infinte potrebbe attuarsi usando questo “cambio dimensionale”:

+2+2+2+2+... = -1

↓

+2+2+2+2+... = 1-1

+1+0+0+0+...

―――――――――――――

3+2+2+2+... = 0

Dunque lo spostamento di un termine da un membro finito a membro infinito prevede non solo un cambio di segno, ma anche un cambio dimensionale (da somma orizzontale a somma verticale).

È vero però che la somma orizzontale non esclude quella verticale.

Questa comunque è più un’idea di riflessione che un modello, in quanto in realtà si possono trovare varie inconsistenze o non tanta chiarezza.

Teniamo inoltre conto che ogni termine a può essere visto come serie infinta a+0+0+0+...

Viene inoltre da chiedersi se ci sia anche la possibilità di usare l’“asse z”.

So che il paragrafo appena scritto è alquanto vago, ma per ora risulta anche a me non chiara la questione.

Inoltre possiamo notare come l'idea di 1-1+1-1+... che diventa 1/2 sia tranquillamente associabile invece anche all'atemporalità (un punto di vista apparentemente contraddittorio con la visione prima esposta).

Ossia, come già spiegato nel paragrafo per 1-1+1-1+... (in capitolo 1: "serie famose") è un po' come se da un punto di vista atemporale la serie 1-1+1-1+... sia 1/2. Al momento dunque dell'associazione del risultato, il tempo è escluso, e si riguarda in un'ottica atemporale una serie, che invece prima aveva temporalità.

L'atemporalizzazione è un'uscita dalla dimensione temporale, un guardare da fuori, che può essere visto come il guardare da un "livello superiore" (un po' come un aereo che sorvola un territorio e ne riesce a percepire l'aspetto globale, che invece sarebbe "impossibile" da notare per uno a terra).

Ci connettiamo dunque ad un nuovo paragrafo: i livelli. Mi rendo però conto di non aver esposto in modo rigoroso e/o molto chiaro.

11e) Livelli

Alla luce delle riflessioni fatte prima, possiamo pensare che per esempio, nella serie 1-1+1-1+... il risultato 1/2 sia localizzato in un "livello superiore" che per ora indicheremo come l1. I termini 1 e -1 sono invece nel livello 0.

Allo stesso modo per la serie 1+1+1+1+...=-1/2

Ecco uno schema:

liv. 1:   -1/2

liv. 0:   1+1+1+1+... = +∞

In questo caso il +∞ di 1+1+1+... può essere riletto come -1/2 al livello superiore, o forse possiamo pensare che il -1/2 sia il riflesso di 1+1+1+... e non del relativo +∞ che invece ha già perso l'informazione del -1/2.

Si può anche pensare che in modo analogo vi possano essere livelli superiori al l1.

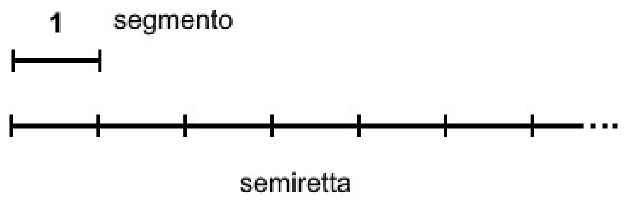
Possiamo pensare che questi livelli siano "livelli di infinito".

E ci possiamo collegare anche alla geometria, parlando di infiniti (già semiretta, retta, piano, spazio, punto, ... usano tutti il concetto di infinito).

11f) Geometria

La serie 1+1+1+1+... può essere collegata all'idea di concatenazione di segmenti da un'unità ciascuno.

Infiniti segmenti concatenati in un verso danno una semiretta.

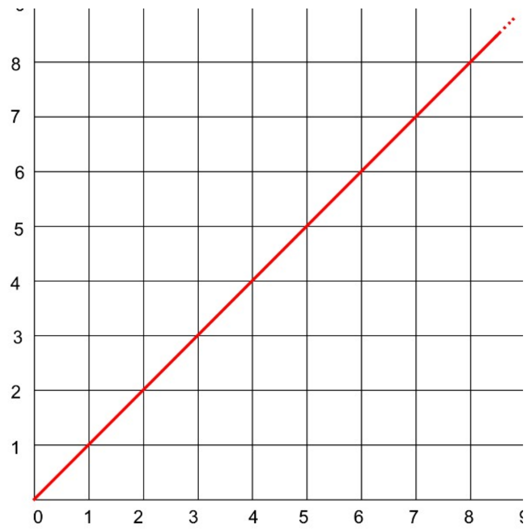


Dunque un’idea che può scaturire, alla luce delle serie infinite, è che la semiretta sia l’ente base e non lo sia invece la retta, che invece risulta essere due volte la semiretta (infatti di solito si considera la retta come primaria, e la semiretta come una sua metà); questa idea è uno spunto di riflessione, più che un’affermazione.

Abbiamo visto però che per l’associazione di un valore ad una serie infinita, in caso di divergenza, tiene conto anche di come la si raggiunge; cioè per esempio, sia 1+1+1+... e sia 1+2+3+4+... divergono, ma hanno valori diversi, rispettivamente -1/2 e -1/12.

Dunque nel paragone geometrico dobbiamo tener conto anche dei singoli termini.

Un modo per farlo è di usufruire del piano cartesiano con un grafico.



Abbiamo dunque l'asse x che indica il numero di termini aggiunti, e l'asse y che indica la somma parziale x-esima (ossia la somma di tutti i termini fino al termine x-esimo)

Abbiamo però visto che il grafico a linee non è buono per estrarre il valore di una serie, lo è invece il grafico istogramma.

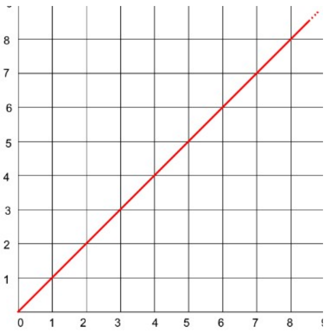
In questo capitolo useremo il grafico a linee comunque, per semplicità, anche perché può essere ricondotto comunque facilmente all'istogramma. Sarebbe comunque però da approfondire l'argomento anche mediante grafici istogrammi.

Sappiamo inoltre che 1+1+1+1+...=-1/2

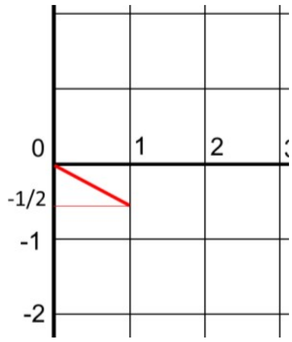
Come possiamo incorporare questo risultato geometricamente?

Collegandoci anche all’idea di più livelli prima esposta, attuiamo un’associazione tra la semiretta y=x nel I quadrante del grafico di prima con il vettore $v = \binom{1}{-1/2}$

Cioè:



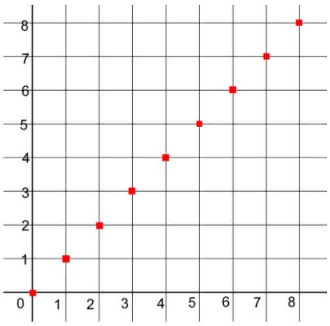
→



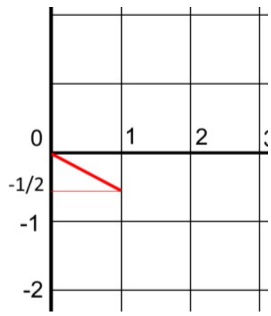
al livello 0 al livello 1

Questa idea può essere ulteriormente declinata e portare ad altre idee.

Come per esempio il fatto che forse è più corretto associare il grafico a punti al vettore v:



→



al livello 0 al livello 1

Cioò potrebbe far pensare che in pratica si tratti di una “condensazione” di punti.

Ma ciò poco funziona per le funzioni non rette (come quella per 1+2+3+4+... che è $y=x^2/2+x/2$)

Ritornando alla questione retta/semiretta:

La retta dunque sarebbe associata alla serie a due versi:

s: ... +1 +1 +1 +1 +1 +...

Più approfondimenti su questo argomento si collegano ad un modo diverso di pensare come siano “organizzati” i numeri: l’analisi non standard è già un buono spunto, ma più riflessioni possono essere fatte, e qui non saranno trattate per brevità.

12) Problematiche aperte

Più volte nel testo sono state indicate alcune parti questioni a me non chiare, non ancora risolte da me, oppure che secondo me meritano di essere approfondite (erano le parti sottolineate).

Specifico il “me”, in quanto potrebbero essere già state risolte e sono io che non ne so.

Qui di seguito un elenco di alcune questioni aperte:

- Rottura di comportamento per la formula

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

  che per x=1 non è definita, ma

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -1/2$$

  e presenza di asimmetria:

$$\frac{\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{1-x} + \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{1-x}}{2} = -1$$

  mentre il punto si trova su -1/2 (1+1+1+...=-1/2).

  Che sia presente un’asimmetria nella “struttura” degli infiniti?

- Formula dilatazioni non 0...0x per serie divergenti a termini non costanti non pattern con metodi euristici di manipolazione serie (dunque non con le funzioni associate)

- Metodo per trovare la curva riassuntiva in una serie a termini non costanti, non a pattern.

- Estensione della formula

$$s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i i$$

  per n tendente a infinito.
  Sembra non funzionare, perché?

  Per esempio: la serie 1+2+3+4+... potrebbe essere pensata come una serie a pattern, con pattern di lunghezza infinita ed elementi 1, 2, 3, 4, ...

  La formula diventerebbe dunque:

$$s = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i i\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)-\frac{1}{n}\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{4}+\frac{n}{4}-\frac{n^2}{3}-\frac{n}{2}-\frac{1}{6}\right) = -\infty$$

  e dunque non -1/12

  È abbastanza ovvio che ciò accada, ma maggiori spiegazioni del perché sarebbero interessanti.

- Serie infinite a doppio verso:
  ... +1 +1 +1 +...

- Espansione bidimensionale:

Un problema interessante arriva quando si cerca di affrontare una serie infinita, come somma verticale di infinite serie.
Con 1+2+3+4+... per esempio si può avere:

```
1 +1 +1 +1 +1 +... = -1/2 -0
0 +1 +1 +1 +1 +... = -1/2 -1
0 +0 +1 +1 +1 +... = -1/2 -2
0 +0 +0 +1 +1 +... = -1/2 -3
0 +0 +0 +0 +1 +... = -1/2 -4
⋮  ⋮   ⋮  ⋮   ⋮
=  =   =  =   =
1 +2 +3 +4 +5 +...
```

Perché le somme nelle due dimensioni non coincidono?
Infatti:

(-1/2-0)+(-1/2-1)+(-1/2-2)+(-1/2-3)+... =
= -1/2-3/2-5/2-7/2-... =
= -1/2(1+3+5+7+...) = -1/2 * 1/3 = -1/6

Mentre 1+2+3+4+...=-1/12

La questione è da approfondire, studiare e chiarire.

Addirittura possiamo trovare un caso un po’ particolare:

```
 +1 +1 +1 +1 +... = -1/2
 +1 +1 +1 +1 +... = -1/2
 +1 +1 +1 +1 +... = -1/2
 +1 +1 +1 +1 +... = -1/2
  ⋮  ⋮  ⋮  ⋮
```
$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$

E qual è il suo senso/significato?

- Serie a termini complessi:
  Esempio:

  1+1i + 1+2i + 1+3i + 1+4i +... =? -1/2-i/12

- Estensione dei metodi per fattori non naturali e la loro eventuale rappresentazione in serie:
  per esempio:
  mentre la dilatazione per fattore 2 di 1+1+1+1+... corrisponde a 0+1+0+1+... oppure a 1+0+1+0+..., a cosa corrisponde in serie dilatata di 1.5 ?

  In modo analogo per lo slittamento, o per altro.

- Metodo di manipolazione serie diretto per ottenere le serie 0+1+0+0+2+0+0+3+0+... oppure 1+0+0+2+0+0+3+0+0+...

  Potrebbe essere che un metodo generale per trovare le serie non 0...x dilatate di una serie a termini non costanti non pattern, usi le serie a pattern e/o le serie alternate, o forse addirittura l’espansione bidimensionale.

- Espansioni tridimensionali o n-dimensionali... di una serie e il loro senso/significato.

13) Lista di serie infinite con i loro valori

1-1+1-1+... = 1/2

1-2+3-4+... = 1/4

1-4+9-16+... = 0

1-3+5-7+9-11+... = 0

$x+x^2+x^3+x^4+... = x/(1-x)$

$x-x^2+x^3-x^4+... = x/(1+x)$

$1+x+x^2+x^3+... = 1/(1-x)$

$1-x+x^2-x^3+... = 1/(1+x)$

1+1+1+1+... = -1/2

x+x+x+x+... = -x/2

n+a+a+a+... = -a/2 + (n-a)

a+...+a+n+a+a+... = -a/2 + (n-a)

1+2+3+4+... = -1/12

2+4+6+8+... = -1/6

1+4+9+16+... = 0

0+1+1+1+... = -3/2

$0+0+1+1+1+... = -5/2$

$2+1+1+1+1+... = 1/2$

$0+1+2+3+4+... = 5/12$

$0+0+1+2+3+4+... = 23/12$

$2+3+4+5+... = -7/12$

$0+2+3+4+... = -13/12$

$0+1+0+1+0+1+... = -1/2$

$0+x+0+x+0+x+... = -x/2$

$1+0+1+0+1+0+... = 0$

$x+0+x+0+x+0+... = 0$

$0+0+1+0+0+1+... = -1/2$

$0+1+0+0+1+0+... = -1/6$

$1+0+0+1+0+0+... = 1/6$

Formula generale per dilatazione serie a+a+a+...

$D(a,d,p) = -a/2 + a(d-p)/d$

$0+1+0+2+0+3+... = -1/12$

$0+x_1+0+x_2+0+x_3+...$ = valore di $x_1+x_2+x_3+...$

1+0+2+0+3+0+... = 1/24

1+0+0+2+0+0+3+0+0+4+0+0+... = 5/36

0+1+0+0+2+0+0+3+0+0+4+0+... = -1/36

0+0+1+0+0+2+0+0+3+0+0+4+... = -1/12

1+3+5+7+... = 1/3

0+1+3+5+7+... = 7/3

0+1+0+3+0+5+... = 1/3

1+0+3+0+5+0+… = 1/12

2+4+6+8+... = -1/6

1-2+1-2+1-2+... = 1

a+b+a+b+a+b+... = -b/2

1+1+2+2+3+3+... = -1/24

1-1+2-2+3-3+... = 1/8

1+2+3+1+2+3+... = -5/3

a+b+c+a+b+c+... = (a-b-3c)/6

a+b+c+...+n+a+b+c+...+n+...=

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i i$$

dove x_i è l'i-esimo termine del pattern, e N è il numero di componenti di un pattern

Errata corrige del 6 giugno 2020

Questa errata corrige potrebbe a sua volta contenere errori.

Dove non vengono indicati alcuni aspetti (come ad esempio il formato del testo, o le evidenziazioni) si intende che essi rimangono invariati.

Le sottolineature indicano che il testo doveva essere riportato sottolineato (indicazione di problema aperto o irrisolto).

Il testo in corsivo indica invece una nota, che non deve però appartenere al libro: è una nota di chiarimento sulla correzione.

Pag.	**Versione stampata**	**Versione corretta**
31	Invece, il grafico a istogramma interseca a -1/2	Invece, il grafico a istogramma porta indirettamente al valore a -1/2
31	La dimostrazione è simile a quella di Ramanujan	La “dimostrazione” è simile a quella di Ramanujan
35	Al momento non mi è chiaro il metodo da usare per generare la curva blu (il metodo usato per 1+1+1+1+... i per ...	Al momento non mi è chiaro il metodo da usare per generare la curva blu in tutti i casi simili a questo... (il metodo usato per 1+1+1+1+... e per ...
41	A’’;	A’’:
41	Il valore di A’ è uguale a A poiché A è stabile	Il valore di A’ è uguale al valore di A poiché A è stabile
55	Non ho verificato se è possibile applicare la compressione alle serie geometriche.	<u>Non ho verificato se è possibile applicare la compressione alle serie geometriche con successo.</u> *La frase doveva dunque essere sottolineata in quanto delinea un problema aperto.*
58	U è la up compressione, D è la down compressione	se attuata una 2-compressione, U è la up compressa, D è la down compressa
59	La linea viola superiore (nel primo quadretto coincide con il grafico rosso) è la linea rappresentate la Up serie ...	La linea viola superiore (nel primo quadretto coincide con il grafico rosso) è la linea rappresentante la Up serie ...
60	... costanti e non a pattern con risultati efficienti e sensati ...	... costanti e non a pattern con risultati efficienti e sensati, anche se è probabile che la 2-compressione possa essere applicata con successo alle serie geometriche divergenti.
63	costanti e non a pattern con risultati efficienti e sensati.	costanti e non a pattern con risultati efficienti e sensati, anche se è probabile che la 3-compressione possa essere applicata con successo alle serie geometriche divergenti.

63	Non possibile.	Non possibile. anche se è probabile che una n-compressione possa essere applicata con successo alle serie geometriche divergenti.
70	Quando dà -2+3-4+...=?	Quanto dà -2+3-4+...=?
77	Quanto dà 2+3+4+...=7/12	Possiamo trovare che: 2+3+4+...=-7/12
78	Se andiamo ad osservare la funzione associata alle somme parziali e la linea ...	Se andiamo ad osservare la funzione delle somme parziali e la linea ...
83	Una dilatazione è per un fattore n positivo intero.	Una dilatazione è per un fattore n positivo intero, che indicheremo con n-dilatazione.
83	La 2 dilatazione è molto importante.	La 2-dilatazione è molto importante.
86	Notiamo che la serie 0+1+0+1+0+1+... è la serie 1+0+1+0+... slittata di -1. E in modo analogo per le serie 0+a+0+a+... di a+0+a+0+...	Notiamo che la serie 0+1+0+1+0+1+... è la serie 1+0+1+0+... slittata di 1. E in modo analogo una serie 0+a+0+a+... è la 1-slittata di a+0+a+0+...
87	Notiamo che una serie 0+1+0+2+0+3+... è la serie 1+0+2+0+3+0+... slittata di -1. E in generale per una serie $0+x_1+0+x_2+...$ di $x_1+0+x_2+0+...$	Notiamo che la serie 0+1+0+2+0+3+... è la serie 1+0+2+0+3+0+... slittata di 1. E, in generale, una serie $0+x_1+0+x_2+...$ è la 1-slittata di $x_1+0+x_2+0+...$
92	... a partire da una serie divergente a termini non costanti con la manipolazione ...	... a partire da una serie divergente a termini non costanti e non a pattern, con la manipolazione...
93	Essendo la 3-dilatazione, una dilatazione per un fattore 3, vi saranno 3 serie intermedie principali:	Essendo la 3-dilatazione una dilatazione per fattore 3, vi saranno 3 tipi principali di 3-dilatazione:
94	La linea blu interseca l'asse y a 1/2 come la serie 1+1+1+1+...=-1/2	La linea blu interseca l'asse y a 1/2 come la serie 1-1+1-1+...=1/2
95	La 3-dilatazione 00x non cambia il valore di una serie a termini non costanti	La 3-dilatazione 00x non cambia il valore di una serie divergente a termini non costanti e non a pattern
97	È necessario usufruire delle funzioni associate (vedi capitolo 10:	È necessario usufruire delle funzioni associate (vedi capitolo 9):
98	La 3-dilatazione è analoga simile alla 2-dilatazione paritaria ...	La 3-dilatazione è simile alla 2-dilatazione paritaria (solo che per un fattore 3, invece che 2)
98		*All'inizio del capitolo 6c da aggiungere:*

		Per una n-dilatazione esistono n tipi di n-dilatazioni possibili principali (come per la 3-dilatazione erano possibili 3 tipi principali di 3-dilatazione: 00x, 0x0, x00) 0....0x 0...0x0 ... 0..x..0 ... 0x0...0 x0....0 Per comodità (senza bisogno di fare calcoli ogni volta) ricordiamoci che: Una n-dilatazione del tipo 0...x non cambia il valore ad una serie. (ricordiamoci infatti che già le dilatazioni 0x, oppure 00x non cambiavano i valori di una serie; in modo analogo per tutte le n-dilatazioni del tipo 0...x).
102	Per trovare il nome della dilatazione finale, bisogna dunque applicare le dilatazioni ai termini di dilatazioni.	Per trovare il nome della dilatazione finale, bisogna dunque applicare la seconda dilatazione al nome della prima dilatazione.
102	-2-4-6-8-12-... = -2(1+2+3+..) =1/6	-2-4-6-8-12-... = -2(1+2+3+...)=1/6
115	4^x+... e ti è il valore associato a T(x)	4^x+... e t è il valore associato a T(x)
116		*A fine capitolo era da aggiungere:* Per quanto riguarda le funzioni associate (vedi capitolo 9): interessante sarebbe trovare eventuali funzioni associate alle serie a pattern, che per ora non ho però ricercato.
120	1+1+1+1+1+... = -1/2 1+0+0+0+0+... = 1 2+1+1+1+1+... = 1/2	1+1+1+1+1+... = -1/2 + 1+0+0+0+0+... = 1 = 2+1+1+1+1+... = 1/2
123		*La pagina presenta vari paragrafi appartenenti ad un'altra sezione.* *La pagina 123 è da eliminare tutta, tranne l'ultimo riquadro, che è corretto e al posto giusto:* *"E per una serie a+a+a+a+..."*
129	Una questione aperta è: perché le serie geometriche slittate non cambiano valore?	Una questione aperta è: perché le serie geometriche slittate non cambiano valore come invece fanno

		<u>le serie divergenti non a pattern ma non geometriche?</u> *La frase era da riportare sottolineata in quanto descrive un problema aperto.*
133		*Sulla riga relativa alla serie 1+3+5+7+... la funzione associata ha un'evidenziazione per un errore di stampa*
133	*Sulla riga relativa alla funzione 0+1+0+2+0+3+0+4+... la funzione associata è:* $$\frac{x^2}{8}-\frac{1}{12}$$	*Versione corretta:* $$y=\frac{x^2}{8}-\frac{1}{12}$$
134	*ALT. La funzione è quella riportata ma in versione alternata ossia se è riportata la funzione.	*ALT. La funzione indica l'andamento dei valori assoluti dei termini (per x=1,2,3,... con $x \in \mathbb{N}-\{0\}$). I termini nella serie sono in realtà a segno alterno (+,-,+,-,...).
134	*[4] Per brevità omettiamo l'analisi della funzione dei termini, che è a tratti ma riconducibile ad una continua...	*[4] Per brevità omettiamo l'analisi della funzione, che è a tratti ma riconducibile ad una continua...
134		*Da aggiungere a fine capitolo* <u>Interessante sarebbe studiare eventuali funzioni associate alle serie a pattern.</u>
136	In questo caso si limita la funzione delle somme parziali ai soli numeri naturali, e il grafico a linee...	In questo caso si visualizza la funzione delle somme parziali solo per i numeri naturali (che sull'asse x rappresentano gli indici delle varie somme parziali), e il grafico a linee...
138	L'intersezione della retta (indipendentemente ... ... il valore associato alla serie.	*Da riportare evidenziato in un riquadro arancione.*
141	La proprietà associativa non può essere ...	La proprietà associativa non può essere applicata alle serie non convergenti, né alle serie non stabili, né a quelle non geometriche; altrimenti il loro valore cambierebbe.
155		*Aggiungere un punto alla lista dei problemi aperti:* • Studiare e verificare se è possibile applicare con successo la compressione alle

		serie geometriche (incluse anche quelle alternate con i valori assoluti dei termini in andamento geometrico) • perché le serie geometriche slittate non cambiano valore come invece fanno le serie divergenti non a pattern ma non geometriche? • Funzioni associate alle serie a pattern

CONTACTS

writer of the book (me writing now):
andrea sorato

telegram
@rifmod

website
rifmod.com